# 3. Rovnice a nerovnice

Klíč na s. 90–91

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Rovnice a nerovnice, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

**3.1 Algebraické rovnice a nerovnice**
- užít pojmy rovnice a nerovnice s jednou neznámou, levá a pravá strana rovnice a nerovnice, obor rovnice a nerovnice, kořen rovnice, množina všech řešení rovnice a nerovnice;
- užít ekvivalentní úpravy rovnice a nerovnice;
- provést zkoušku.

**3.2 Lineární rovnice a jejich soustavy**
- řešit lineární rovnice o jedné neznámé;
- vyjádřit neznámou ze vzorce;
- řešit rovnice v součinovém a podílovém tvaru;
- řešit početně soustavy lineárních rovnic;
- řešit graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých;
- užít lineární rovnice a jejich soustavy při řešení slovní úlohy.

**3.3 Rovnice s neznámou ve jmenovateli**
- stanovit definiční obor rovnice;
- řešit rovnice o jedné neznámé s neznámou ve jmenovateli;
- vyjádřit neznámou ze vzorce;
- užít rovnice s neznámou ve jmenovateli při řešení slovní úlohy;
- využít k řešení slovní úlohy nepřímou úměrnost.

**3.4 Kvadratické rovnice a nerovnice**
- řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice a nerovnice;
- užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice;
- užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy.

**3.5 Lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy**
- řešit lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy;
- řešit nerovnice v součinovém a podílovém tvaru.

*(Zdroj: http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1; upraveno)*

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Rovnice a nerovnice najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:
- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 9–10, 12)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 9–10, 12)
- Matematika pro střední školy – 2. díl: Výrazy, rovnice a nerovnice

**Úloha 01** Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Zápis $\pi x < 4$ je zápisem nerovnice s jednou neznámou. ANO ☐ NE ☐
2. Má-li rovnice řešení v oboru **Z**, má tato rovnice řešení i v oboru **N**. ANO ☐ NE ☐
3. Má-li rovnice nekonečně mnoho řešení, pak je touto množinou vždy **R**. ANO ☐ NE ☐
4. Množinou všech řešení nerovnice $x^2 < 4$ je $K = (-\infty; 2)$. ANO ☐ NE ☐

**Úloha 02** Levá strana rovnice s jednou neznámou $x \in \mathbf{R}$ vyjadřuje pětinu druhé mocniny neznámé zmenšenou o 1, pravá strana rovnice je druhou mocninou pětiny neznámé.

a) Zapište rovnici pomocí matematické symboliky.
b) Určete množinu $K$ všech řešení rovnice.
c) Proveďte zkoušku.

**Úloha 03** Je dána rovnice $2x - 5 = -5x + 2$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$. Rozhodněte o každé z následujících rovnic (1.–4.), zda je s danou rovnicí ekvivalentní (ANO), či nikoli (NE).

1. $2x - 2 = 5 - 5x$ ANO ☐ NE ☐
2. $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{-5x+2}{x-1}$ ANO ☐ NE ☐
3. $5x = 5$ ANO ☐ NE ☐
4. $x^2 = 1$ ANO ☐ NE ☐

**Úloha 04** Petr jel ze svého domova navštívit kamaráda Pavla do jeho bydliště. Cestu tam absolvoval průměrnou rychlostí $20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, zpátky jel průměrnou rychlostí $12\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Kdyby se cestou tam i zpět pohyboval průměrnou rychlostí $16\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, trvaly by mu obě cesty o 15 minut méně. Vypočítejte, kolik **km** Petr ujel.

**Úloha 05** Je dána rovnice $x^2 + 9x - 5 = (x - m) \cdot (x - n)$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$. Jaká je hodnota $m + n$?

A) $-9$ B) $-5$ C) 5 D) 9 E) nelze jednoznačně určit

**Úloha 06** Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

$$2 \cdot \frac{(x+4)}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{2x^2+x-2}{x^2-4}$$

a) Zapište definiční obor rovnice.
b) Určete množinu všech řešení rovnice.

**Úloha 07** Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{3 + x \cdot (x+4)}$$

Které z následujících tvrzení o kořenech zadané rovnice je pravdivé?

A) Rovnice má právě dva nenulové kořeny.
B) Rovnice má právě jeden dvojnásobný kořen.
C) Rovnice má právě dva kořeny, které mají stejnou absolutní hodnotu.
D) Rovnice má právě dva kořeny, z toho jeden je roven 0.
E) Rovnice nemá řešení.

**Úloha 08** Anna a Pavel po písemné práci diskutovali o správnosti řešení jedné úlohy. Oba se shodli na tom, že výsledek příkladu jim vyšel stejně, přestože postupovali jiným způsobem. V zadání úlohy bylo uvedeno nenulové číslo. Anna toto číslo přičetla ke zlomku $\frac{2}{3}$, zatímco Pavel toto číslo přičetl k čitateli i jmenovateli zlomku $\frac{2}{3}$. V dalším řešení příkladu ani jeden z nich neudělal početní chybu.

a) Určete číslo uvedené v zadání úlohy písemné práce.
b) Určete, jaký jim vyšel výsledek.

**Úloha 09** Je dána rovnice s neznámou $y$.

$$(y+2) \cdot \frac{y^4 - 16}{y^2 + 4} \cdot (y^2 - 2) = 0$$

Kolik řešení má daná rovnice **v oboru racionálních čísel**?

A) žádné B) 1 C) 2 D) 4 E) jiný počet

**Úloha 10** Je dána rovnice s neznámou $v \in \mathbf{R}$.

$$8 + \frac{(v^3+27) \cdot (8+v)}{v^2+7v-8} - 1 = 7$$

Ve kterém intervalu se nachází všechny kořeny dané rovnice?

A) $(-\infty; -20)$ B) $\langle -20; -10 \rangle$ C) $(-10; 0\rangle$ D) $(0; 10\rangle$ E) $(10; \infty)$

**Úloha 11** Rozhodněte o každé soustavě lineárních rovnic o dvou neznámých (1.–4.), kde $x, y \in \mathbf{R}$, zda je jejich grafickým řešením dvojice **rovnoběžných různých** přímek (ANO), či nikoli (NE).

1. $\frac{5x}{x+2} = \frac{y+1}{x+2}$, $5x = y + 1$ ANO ☐ NE ☐
2. $2y + 5 = 4x - 7$, $2x - y = 1$ ANO ☐ NE ☐
3. $2y - 5 = x - 7$, $2x - 5 = y + 1$ ANO ☐ NE ☐
4. $4y + 5 = 6x + 1$, $9x - 5 = 6y + 1$ ANO ☐ NE ☐

**Úloha 12** Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic s neznámými $x, y$.

$$2^{3x} \cdot 2^{3+y} = 2$$
$$3^{2x} = \frac{3}{3^{2+y}}$$

**Úloha 13** Automobil se rozjíždí po dobu $t$ na dráze $s$ se zrychlením $a$. Pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu platí vztah $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Které vyjádření zrychlení $a$ odpovídá uvedenému vztahu?

A) $a = \frac{2s}{t^2} - \frac{2v_0}{t}$  B) $a = \frac{2 \cdot (s - v_0 t)}{t}$  C) $a = \frac{v_0}{t} - 2s$  D) $a = \frac{2s + v_0 t}{t^2}$  E) $a = \frac{2s}{t^2} - v_0 t$

**Úloha 14** Jaké je řešení nerovnice $\frac{1}{x} \geq 1$ v oboru **R**?

A) $(-\infty; 1\rangle$  B) $(0; 1\rangle$  C) $\{1\}$  D) $\emptyset$  E) jiná množina

**Úloha 15** Přiřaďte k následující rovnici a nerovnicím (1.–3.) množinu všech jejich řešení (A)–E)).

1. $\frac{1}{u-1} + 3 = \frac{2-u}{u-1}$  2. $\frac{1}{u-1} + 3 \leq \frac{3u-2}{u-1}$  3. $\frac{1}{u-1} + 3 \geq \frac{u+2}{u-1}$

A) $\emptyset$  B) **R**  C) $\mathbf{R} - \{1\}$  D) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$  E) $\langle 2; \infty)$

**Úloha 16** Určete množinu všech řešení nerovnice s neznámou $n$ **v oboru přirozených čísel.**

$$\frac{2 \cdot (n^2 - 4n + 4) \cdot (n+2)}{2-n} \geq 0$$

**Úloha 17** Je dána soustava nerovnic s reálnou neznámou $x$.

$$2x - 1 \geq 1 + 3x$$
$$3x - 1 \leq 5$$

Jaké je řešení dané soustavy nerovnic v oboru **R**?

A) $(-\infty; -3\rangle$  B) $(-\infty; -4\rangle$  C) $\langle -2; 2\rangle$  D) $(-\infty; 2\rangle$  E) jiná množina

**Úloha 18** Na začátku školního roku byl v prvním ročníku stejný počet dívek a chlapců. Na konci školního roku přešlo 6 chlapců a 1 dívka na jinou střední školu. Tím se poměr dívek a chlapců v prvním ročníku změnil na 3 : 2.

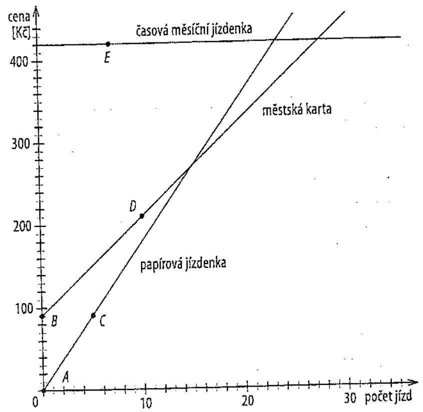
a) Určete, kolik žáků bylo ve třídě **na začátku školního roku.**
b) Určete, kolikaprocentní zastoupení ve třídě měly dívky **na konci školního roku.**

**Úloha 19** Určete, kolik litrů vody o teplotě 90 °C je třeba přilít ke 2 litrům vody o teplotě 10 °C, abychom po jejich smíchání získali vodu o teplotě 50 °C.

**Úloha 20** Dopravní podnik v krajském městě nabízí tyto možnosti jízdy městskou dopravou:

- zakoupení papírové jízdenky,
- zakoupení městské karty a následná levnější cena 1 jízdy,
- zakoupení časové měsíční jízdenky a následný neomezený počet bezplatných jízd.

Grafy závislostí ceny jízdného na počtu uskutečněných jízd jsou množiny izolovaných bodů s celými nezápornými souřadnicemi. Tyto grafy jsou podmnožinami polopřímek, jejichž část lze vidět na obrázku. Body $A, B, C, D, E$ leží v mřížových bodech.




a) Určete, o kolik je nižší cena jízdy v případě zakoupení městské karty než cena jízdy s papírovou jízdenkou. (Cenu městské karty do ceny jízdy nezapočítáváme.)

b) Určete, kolik nejméně jízd je třeba uskutečnit, aby se cestujícímu vyplatilo zakoupit městskou kartu.

c) Vypočítejte, kolik musí v jednom měsíci cestující uskutečnit nejméně jízd, aby pro něj nejvýhodnější variantou bylo zakoupení časové měsíční jízdenky.



# 4. Funkce

Klíč na s. 91–9.

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Funkce, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

**4.1 Základní poznatky o funkcích**

- užít různá zadání funkce a používat s porozuměním pojmy definiční obor, obor hodnot, argument funkce, hodnota funkce, graf funkce včetně jeho názvu;
- sestrojit graf funkce dané předpisem $y = f(x)$ nebo část grafu pro hodnoty proměnné $x$ z dané množiny, určit hodnoty proměnné $x$ pro dané hodnoty funkce $f$;
- přiřadit předpis funkce ke grafu funkce a opačně;
- určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic;
- určit z grafu funkce intervaly monotonie a bod, v němž nabývá funkce extrému;
- užít výrazy s elementárními funkcemi;
- modelovat reálné závislosti užitím elementárních funkcí.

**4.2 Lineární funkce, lineární lomené funkce**

- užít pojem a vlastnosti funkce přímá úměrnost, sestrojit její graf;
- určit lineární funkci, sestrojit její graf;
- objasnit geometrický význam parametrů $a, b$ v předpisu funkce $y = ax + b$;
- určit předpis lineární funkce z daných bodů nebo grafu funkce;
- užít pojem a vlastnosti funkce nepřímá úměrnost, sestrojit její graf;
- užít pojem a vlastnosti lineární lomené funkce, sestrojit její graf;
- určit předpis lineární lomené funkce z daných bodů nebo grafu funkce;
- řešit reálné problémy pomocí lineární funkce a lineární lomené funkce.

**4.3 Kvadratické funkce**

- určit kvadratickou funkci, stanovit její definiční obor a obor hodnot, sestrojit její graf;
- vysvětlit význam parametrů v předpisu kvadratické funkce, určit intervaly monotonie a bod, v němž nabývá funkce extrému;
- řešit reálné problémy pomocí kvadratické funkce.

**4.4 Exponenciální a logaritmické funkce, jednoduché rovnice**

- určit exponenciální funkci, stanovit její definiční obor a obor hodnot, sestrojit její graf;
- určit logaritmickou funkci, stanovit její definiční obor a obor hodnot, sestrojit její graf, užít definici logaritmické funkce;
- vysvětlit význam základu $a$ v předpisech exponenciální a logaritmické funkce, monotonie obou funkcí;
- užít logaritmus, věty o logaritmech, řešit jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice, užít logaritmování při řešení exponenciální rovnice;
- upravovat výrazy obsahující exponenciální a logaritmické funkce a stanovit jejich definiční obor;
- užít poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích v jednoduchých praktických úlohách.

**4.5 Goniometrické funkce, jednoduché rovnice**

- užít pojmy orientovaný úhel, velikost úhlu, stupňová míra, oblouková míra a jejich převody;
- definovat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku;
- definovat goniometrické funkce v intervalu $\langle 0; 2\pi)$, resp. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nebo $(0; \pi)$, resp. v oboru reálných čísel, u každé z nich určit definiční obor a obor hodnot, sestrojit jejich grafy;
- užít vlastnosti goniometrických funkcí, určit z grafu funkce intervaly monotonie a body, v nichž nabývá funkce extrému;
- upravovat jednoduché výrazy obsahující goniometrické funkce a stanovit jejich definiční obor;
- užít vlastnosti a vztahy goniometrických funkcí při řešení jednoduchých goniometrických rovnic.

*(Zdroj: http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1; upraveno)*

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Funkce najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:

- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 13–15, 18–19)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 13–15, 18–19)
- Matematika pro střední školy – 4. díl: Funkce I
- Matematika pro střední školy – 5. díl: Funkce II



Testové úlohy k tematickým celkům

## 3. Rovnice a nerovnice

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

> Na večírek přišlo třikrát více chlapců než děvčat. Po odchodu 8 chlapců a 8 děvčat zbylo na večírku pětkrát více chlapců než děvčat.
>
> *(CERMAT)*

1 **Určete, kolik chlapců a kolik děvčat přišlo na večírek.**

**Uveďte celý postup řešení.**

Řešení:

$h$ – počet chlapců, $d$ – počet dívek

$h = 3d$

$h - 8 = 5(d - 8)$

$3d - 8 = 5d - 40$

$d = 16; h = 48$

Na večírek přišlo 48 chlapců a 16 děvčat.

---

2 V rovnici $x^2 + bx - 12 = 0$ s neznámou $x \in \mathrm{R}$ je jeden kořen $x_1 = -2$.

**Vypočtěte koeficient $b$ a druhý kořen.**

Řešení: $b = -4$; $x_2 = 6$

---

3 Je dána nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

$$\frac{4x-7}{2} - \frac{x-4}{6} \geq 2x - 3$$

**Který z intervalů představuje množinu všech řešení nerovnice?**

A) $\langle \frac{14}{9}; +\infty)$

B) $(1; +\infty)$

C) $(-\infty; 2\rangle$

D) $(-\infty; 1\rangle$

E) $(-\infty; -1)$

Řešení: D



4 Pro veličiny $r_1, r_2, f, n$ platí:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

**Které vyjádření veličiny $f$ odpovídá uvedenému vztahu?**

A) $f = (n-1)(r_1 + r_2)$

B) $f = \frac{1}{n-1}(r_1 + r_2)$

C) $f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1+r_2)}$

D) $f = \frac{(n-1) r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

E) žádné z uvedených

Řešení: C

## 3. Rovnice a nerovnice

1 V oboru R řešte:

1.1 $\frac{14}{5} : b = 7$

1.2 $\frac{1}{c} - \frac{3}{2c} = \frac{3}{4}$

Řešení rovnic zapište ve tvaru zlomku v **základním** tvaru.

---

2 **Z každého z následujících vztahů vyjádřete proměnnou $t$.**

2.1 $s = 0{,}5(t + u)$

2.2 $t^{-1} + z = 2$

---

3 **V oboru R řešte nerovnice a výsledek zapište intervalem.**

3.1 $\frac{x-5}{2} \leq 2x + 5$

3.2 $2x - 1 < -3$

---

4 **V oboru R řešte soustavu nerovnic a výsledek zapište intervalem.**

$2x - 1 < -3$

$\underline{3x + 10 > 1}$

---

5 Pro $x \in R; y \in R \setminus \{0\}$ je dána soustava rovnic:

$\frac{x}{y} = 4$

$2x - 5y = -3$

5.1 Vypočtěte hodnotu neznámé $x$.

5.2 Vypočtěte hodnotu neznámé $y$.

---

6 **V oboru R řešte:**

6.1 $2x^2 - 2 = 3x$

6.2 $a^2 - 2a + 6 = 5(2 - a)$

6.3 $x(x-2) + (x-2)(x+2) = 0$








**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7**

Neznámé číslo nejprve zmenšíme o třetinu své hodnoty, poté ještě o 40. Po vynásobení výsledku dvěma získáme původní neznámé číslo.

*(CERMAT)*

7 **Určete neznámé číslo.**

---

**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8**

Pan Vlk má dvě zaměstnání. V prvním zaměstnání vydělává 400 Kč za hodinu, ve druhém 300 Kč za hodinu. V prvním zaměstnání stráví týdně o 10 hodin více než ve druhém a vydělá si tam za týden dvakrát více.

*(CERMAT)*

8 **Vypočtěte, kolik hodin týdně stráví pan Vlk v prvním zaměstnání.**

---

**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9**

Za nákup 2,5 kg meruněk a 1,5 kg broskví se zaplatilo celkem 85 korun. Kilo broskví je o 2 koruny levnější než kilo meruněk.

*CERMAT)*

9 Užitím rovnic **vypočtěte, kolik korun se zaplatilo za meruňky.**

Uveďte celý postup řešení.

---

10 Pro $x \neq 0$ a $n \in N$ je dáno:

$n = \frac{n}{x} - 3$

**Které z následujících tvrzení platí?**

A) $x = -2$

B) $x = 1 - 3n$

C) $x = \frac{3-n}{3}$

D) $x = \frac{n+3}{n}$

E) $x = \frac{n}{n+3}$

**11** Neznámá $x \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky:

$x < 6 \leq -2x + 4$

**Který zápis je ekvivalentní daným podmínkám?**

A) $x \in (-\infty; -6)$

B) $x \in (-\infty; -1\rangle$

C) $x \in (-2; 6)$

D) $x \in \langle -1; 6)$

E) žádný z uvedených

---

**12** **Jaké je řešení nerovnice** $\frac{-5x}{x-5} < 0$ **v oboru** $\mathbb{R}$**?**

A) $\emptyset$

B) $(5; +\infty)$

C) $(-\infty; 5)$

D) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

E) $(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$

---

**13** **Jaké je řešení nerovnice** $x \cdot (3 - 2x) < 0$ **v oboru** $\mathbb{R}$**?**

A) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

B) $(0; +\infty)$

C) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

D) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$

E) $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$





**14** **Přiřaďte ke každé rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$ (14.1–14.4) interval (A–F), do něhož patří řešení dané rovnice, pokud řešení existuje.**

14.1 $\frac{2x+3}{3} = 0$ ___

14.2 $\frac{x-3}{x} = -3$ ___

14.3 $\frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$ ___

14.4 $\frac{3-2x}{6} = \frac{1}{2}$ ___

A) $(-\infty; -1)$

B) $\langle -1; 0)$

C) $(-0{,}5; 0{,}5)$

D) $(0; 1\rangle$

E) $\langle 1; +\infty)$

F) rovnice nemá řešení

---

**VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15**

> Pravoúhelník o rozloze 2 000 m$^2$ byl rozdělen rovnou hranicí na dva obdélníky. Oba obdélníky se liší v délce jedné strany o 10 m. Obsahy obdélníků jsou v poměru 3 : 2.
>
> *(CERMAT)*

**15** **V jakém poměru jsou délky stran většího z obou obdélníků?**

A) 5 : 6

B) 4 : 5

C) 3 : 4

D) 2 : 3

E) 1 : 2

## VÝSLEDKY ÚLOH – Rovnice a nerovnice

| | |
|---|---|
| 1 | 1.1 $b=\frac{2}{5}$; 1.2 $c=-\frac{2}{3}$ |
| 2 | 2.1 $t=2s-u$; 2.2 $t=\frac{1}{2-z}$ |
| 3 | 3.1 $K=(-5;\infty)$; 3.2 $K=(-\infty;-1)$ |
| 4 | $K=(-3;-1)$ |
| 5 | 5.1 $x=-4$; 5.2 $y=-1$ |
| 6 | 6.1 $K=\{-0{,}5;2\}$; 6.2 $K=\{-4;1\}$; 6.3 $K=\{-1;2\}$ |
| 7 | 240 |
| 8 | 30 hodin |
| 9 | Cena za 1 kg meruněk … $x$ Kč<br>Cena za 1 kg broskví … $y$ Kč<br>$2{,}5x+1{,}5y=85$<br>$x-2=y$<br>$2{,}5x+1{,}5(x-2)=85$<br>$2{,}5x+1{,}5x-3=85$<br>$4x=88$<br>$x=22$ Kč<br>$2{,}5\cdot 22$ Kč $=55$ Kč<br>Za meruňky se zaplatilo 55 Kč. |
| 10 | E |
| 11 | B |
| 12 | E |
| 13 | C |
| 14 | A, D, F, C |
| 15 | C |
| 16 | C |
| 17 | B |







### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Martin byl s cestovní agenturou na několikadenním prázdninovém putování na kolech. Za rok si úplně stejnou cestu zopakoval soukromě s Terezkou.

Cestování si však rozvrhli jinak než s agenturou. Pro každý den si naplánovali stejně dlouhý úsek, a to v průměru o desetinu kratší, než byla průměrná denní trasa s agenturou. Proto jejich cyklistické putování trvalo o dva dny déle než s agenturou.

*(CERMAT)*

**16 Kolik dní trvalo cyklistické putování s cestovní agenturou?**

A) 14
B) 16
C) 18
D) 20
E) jiný počet dní

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Anežka nasbírá kbelík borůvek za dvě hodiny. Pepa za každou hodinu naplní jednu třetinu kbelíku. Oba pracují rovnoměrným tempem.

*CERMAT)*

**17 Za jak dlouho by společně naplnili až po okraj jeden kbelík?**

A) za $1\frac{1}{6}$ hodiny
B) za $1\frac{1}{5}$ hodiny
C) za $1\frac{1}{4}$ hodiny
D) za $1\frac{1}{3}$ hodiny
E) za delší dobu

# 3. Rovnice a nerovnice

## Úloha 01

**1.** ANO
Jedinou neznámou je $x$; symbol $\pi$ zastupuje konstantu.

**2.** NE
Jen celá kladná čísla jsou současně čísla přirozená.

**3.** NE
Tvrzení by bylo pravdivé jen za předpokladu, že i definičním oborem rovnice je množina **R**.

**4.** NE
Množinou řešení jsou ta $x$, pro která platí $|x| < 2$, tj. $x \in (-2; 2)$.

## Úloha 02

**a)** $\frac{x^2}{5} - 1 = \left(\frac{x}{5}\right)^2$

**b)** $K = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$
Ekvivalentními úpravami rovnice z úlohy 02 a) získáme ryze kvadratickou rovnici $x^2 - \frac{25}{4} = 0$, kterou můžeme řešit rozkladem na součinový tvar nebo odmocněním, přičemž platí $x = \sqrt{\frac{25}{4}} = \left|\frac{5}{2}\right| = \pm\frac{5}{2}$.

**c)** $L\left(-\frac{5}{2}\right) = P\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $L\left(\frac{5}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$
Zkoušku provedeme pro obě nalezená řešení.

## Úloha 03

**1.** ANO
K oběma stranám rovnice je přičteno číslo 3.

**2.** NE
Dělení výrazem s neznámou není ekvivalentní úpravou. Daná rovnice a rovnice získaná po vydělení výrazem $(x-1)$ mají jiný definiční obor. Původní rovnice má kořen 1, rovnice po úpravě nemá řešení.

**3.** ANO
K oběma stranám rovnice je přičten výraz $(5x+5)$ a obě strany rovnice jsou vynásobeny číslem $\frac{5}{7}$. Obě úpravy jsou ekvivalentní.

**4.** NE
Umocnění obou stran rovnice na druhou není ekvivalentní úpravou. Původní rovnice má kořen 1, rovnice po úpravě má dva kořeny, a to čísla $-1$ a 1.

## Úloha 04

60 km
Porovnáme skutečný čas (v hodinách) potřebný k cestě tam a zpět s potřebným časem při stálé rychlosti 16 km · h$^{-1}$, tzn. řešíme rovnici $\frac{s}{20} + \frac{s}{12} - 0{,}25 = \frac{2s}{16}$, kde neznámá $s$ označuje vzdálenost Petrova a Pavlova bydliště. Celkem ujel vzdálenost $2s$.

## Úloha 05

A)
Čísla $m, n$ jsou kořeny kvadratické rovnice. Podle Viètových vztahů platí: $m + n = -\frac{b}{a}$, kde $a = 1$ je koeficient u kvadratického členu a $b = 9$ je koeficient u lineárního členu kvadratické rovnice.

## Úloha 06

**a)** $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, příp. $D = \mathbf{R} - \{-2; 2\}$
Ve jmenovateli všech zlomků musí být nenulové číslo, tzn. $x \neq \pm 2$.

**b)** $K = \{-7\}$
Řešení rovnice vede na kvadratickou rovnici, kterou můžeme upravit na součinový tvar $(x+7)\cdot(x-2) = 0$. Kořen $x_2 = 2$ nevyhovuje.

## Úloha 07

D)
Za podmínek $x \neq -3$ a $x \neq -1$ lze rovnici upravit na součinový tvar $x \cdot (x+4) = 0$.

## Úloha 08

**a)** $-\frac{8}{3}$
Označíme neznámé číslo $x$ a řešíme rovnici $\frac{2}{3} + x = \frac{2+x}{3+x}$, která má jediné nenulové řešení.

**b)** $-2$
Hodnotu $-\frac{8}{3}$ nalezenou v úloze 08 a) dosadíme do levé nebo pravé strany rovnice $\frac{2}{3} + x = \frac{2+x}{3+x}$ a vypočítáme výslednou hodnotu výrazu.

## Úloha 09

C)
Ekvivalentními úpravami lze rovnici převést na součinový tvar $(y+2)^2\cdot(y-2)\cdot(y^2+4)\cdot(y+\sqrt{2})\cdot(y-\sqrt{2}) = 0$. Nulovými body rovnice jsou čísla $-2$; 2; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. V zadaném definičním oboru rovnice leží jen řešení $-2$ a 2.

## Úloha 10

C)
Za podmínek $x \neq -8$ a $x \neq 1$ lze rovnici upravit na součinový tvar $(v+3)\cdot(v^2 - 3v + 9) = 0$. Řešením je číslo $-3$.

## Úloha 11

**1.** NE
Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat následovně $K = \{[x; 5x-1]; x \in \mathbf{R} - \{-2\}\}$. Grafickým řešením soustavy jsou kromě bodu $[-2; -11]$ splývající přímky. Jedná se o rovnoběžné totožné přímky.

**2.** ANO
Soustava rovnic nemá řešení, tzn. $K = \emptyset$. Grafickým řešením soustavy jsou rovnoběžné různé přímky.

**3.** NE
Soustava rovnic má právě jedno řešení $K = \left\{\left[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right]\right\}$. Grafickým řešením soustavy jsou dvě různoběžné přímky.

**4.** NE
Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat následovně $K = \left\{\left[x; \frac{3}{2}x - 1\right]; x \in \mathbf{R}\right\}$. Grafickým řešením soustavy jsou rovnoběžné totožné přímky.

## Úloha 12

$K = \{[-1; 1]\}$, příp. $x = -1$; $y = 1$
Porovnáním exponentů získáme soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$3x + 3 + y = 1$$
$$2x = 1 - 2 - y$$

## Úloha 13

A)
Ekvivalentními úpravami vyjádříme proměnnou $a$.

## Úloha 14

E)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na podílový tvar $\frac{1-x}{x} \geq 0$. Množinou všech řešení nerovnice je $K = (0; 1\rangle$.

## Úloha 15

**1.** A)
Kořen $u = 1$ nepatří do definičního oboru rovnice.

**2.** C)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na tvar $0 \leq 0$. Rovnost mezi levou a pravou stranou platí pro všechna $u$ z definičního oboru, tj. pro $u \in \mathbf{R} - \{1\}$.

**3.** D)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na podílový tvar $\frac{2\cdot(x-2)}{x-1} \geq 0$. Její řešení stanovíme např. pomocí nulových bodů.

## Úloha 16

$K = \{1\}$, příp. $n = 1$
Za podmínky $n \neq 2$ lze nerovnici převést na součinový tvar $(n-2)\cdot(n+2) \leq 0$. Jejím řešením je interval $\langle -2; 2)$. V daném intervalu leží jediné přirozené číslo.

## Úloha 17

E)
Vyřešíme každou nerovnici zvlášť a stanovíme průnik jejich řešení, tj. průnik intervalů $K_1 = (-\infty; -2)$ a $K_2 = (-\infty; 2)$. Řešením je $K = (-\infty; -2)$.

## Úloha 18

**a)** 32 žáků
Neznámou $x$ označíme celkový počet žáků ve třídě na začátku školního roku.
Sestavíme a řešíme rovnici $\left(\frac{x}{2} - 1\right) : \left(\frac{x}{2} - 6\right) = 3 : 2$.

**b)** 60 %
Poměr dívek a chlapců činí na konci školního roku 3 : 2, tzn. počet dívek tvoří 3 díly z 5 dílů, tj. $\frac{3}{5} = 0{,}6$, tj. 60 %.

## Úloha 19

2 l
Jedná se o řešení slovní úlohy „o směsích“. Sestavíme a řešíme rovnici $V_1 \cdot t_1 + V_2 \cdot t_2 = (V_1 + V_2) \cdot t$ s neznámým objemem $V_2$.

## Úloha 20

**a)** o 6 Kč
S využitím souřadnic bodů $A$ a $C$ stanovíme cenu papírové jízdenky (18 Kč), pomocí souřadnic bodů $B$ a $D$ stanovíme cenu městské karty (90 Kč) a cenu levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč).

**b)** 16 jízd
Výslednou hodnotu lze vyčíst z grafu, příp. určit početně. Cena papírové jízdenky (18 Kč), cena měsíční karty (90 Kč) a cena levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč) viz 20 a). Dále řešíme nerovnici $90 + 12x < 18x$; $x \in \mathbf{N}_0$.

**c)** 28 jízd
Pomocí vyznačeného bodu $E$ stanovíme cenu časové měsíční jízdenky (420 Kč). Cena měsíční karty (90 Kč) a cena levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč) viz 20 a). Dále řešíme nerovnici $420 < 90 + 12x$; $x \in \mathbf{N}_0$. Vypočítanou hodnotu lze ověřit i v grafu.

# 4. Funkce

## Úloha 01

Definiční obor funkce zjišťujeme na ose $x$, obor hodnot na ose $y$.

**a)** $D(f) = (-2; 3)$, $H(f) = (-3; 1)$, $x = 2$

**b)** $D(f) = (-\infty; 2)$, $H(f) = (-3; \infty)$, $x = 1$

## Úloha 02

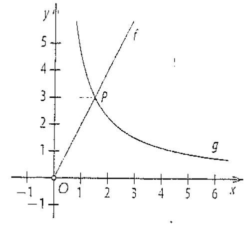
E)
Funkce $g(x)$ nabývá maxima v bodě $x = -1$. Platí $g(-1) = 4$.

## Úloha 03

**1.** ANO
Souřadnice bodu $P$ dosadíme do předpisu přímé úměrnosti $y = kx$ a vypočítáme hodnotu $k$.

**2.** NE
Souřadnice bodu $P$ dosadíme do předpisu nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$ a vypočítáme hodnotu $k$ ($k = 4{,}5$).

**3.** ANO
Vyplývá např. z grafů funkcí $f$ a $g$ pro $x > 0$.



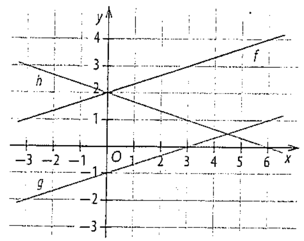

**4.** NE
Funkce $g$ je klesající (viz graf výše).

## Úloha 04

**a)** $b = 2$
Hodnotu parametru $b$ odečteme na ose $y$.

**b)**
Protože parametr $a$ je u funkcí $f$ a $g$ stejný, přímky představující grafy těchto funkcí jsou rovnoběžné (viz obrázek níže).

**c)**
Přímky představující grafy funkcí $f$ a $h$ jsou souměrně sdružené v osové souměrnosti podle osy $y$ (viz obrázek níže). Lze také dosadit bod [3; 3] ležící na přímce představující graf funkce $f$ do předpisu $y = ax + 2$ a určit hodnotu parametru $a$.




## Úloha 05

**a)** $f: y = 5{,}5x + 75$; $x \in \mathbf{N}$
Za $x$ provolaných minut zaplatí zákazník $5{,}5x$ Kč. Měsíční platbu $y$ tvoří součet částky za provolané minuty a 75 Kč za tarif.

**b)** 68
Řešíme rovnici $449 = 5{,}5x + 75$ pro $x \in \mathbf{N}$.


Klíč k testovým úlohám