4. Funkce

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 1

Pan Mrázek několikrát do měsíce kontroloval spotřebu plynu v domácnosti. Vždy v 7 hodin odečetl stav plynoměru a společně s datem jej zapsal do tabulky.

Datum odečtu	Údaj na plynoměru v m^3
1. 4.	1 243,56
7. 4.	1 248,73
12. 4.	1 256,80
18. 4.	1 263,95
25. 4.	1 275,15
30. 4.	1 282,90

(CERMAT)

1 **Ve kterém období mezi dvěma následujícími odečty byla průměrná denní spotřeba plynu největší?**

A) od 1. 4. – 7. 4.

B) od 7. 4. – 12. 4.

C) od 12. 4. – 18. 4.

D) od 18. 4. – 25. 4.

E) od 25. 4. – 30. 4.

Řešení: B

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Hodnoty ve Fahrenheitových stupních (f) jsou lineární funkcí hodnot v Celsiových stupních (c).

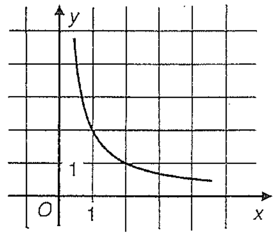
Např. 8 °C odpovídá 46,4 °F a 24 °C odpovídá 75,2 °F.

(CERMAT)

2 **Určete předpis této funkce.**

Řešení: $f = 1{,}8c + 32{,}0$

VÝSLEDKY ÚLOH – Funkce

1	1.1	x: 1, 2; y: 2, 1
	1.2	
	1.3	$x = 4$
2		2.1 $P[-1; 2]$; 2.2 $P[3; -3]$
3		E
4		E, A, B
5		A
6		6.1 $x = -\frac{2}{3}$; 6.2 $x = 4$; 6.3 $x = 0{,}5$
7		-2
8		8.1 $x = 0{,}2$; 8.2 $x = \frac{1}{9}$; 8.3 $x = 50$; 8.4 $x = 8$; 8.5 $x = 10$
9		D, A, B, F

Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – CERMAT
Jankovcova 933/63, 170 00 Praha 7, tel.: +420 224 507 507
www.cermat.cz, www.novamaturita.cz

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

V půjčovně automobilů se pan Novák rozhoduje, zda si má půjčit automobil A nebo B. Náklady n (v Kč) na provoz automobilu A jsou určeny lineární funkcí $n = 3\,000 + 2{,}4x$, náklady na provoz automobilu B lineární funkcí $n = 9\,000 + 1{,}6x$, kde proměnná x představuje ujetou vzdálenost (v km).

(CERMAT)

3 **Určete dolní mez pro ujetou vzdálenost, kterou by měl pan Novák vypůjčeným automobilem překročit, aby se mu vyplatila výpůjčka automobilu B.**

Řešení: 7 500 km

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Kolikrát (y) se zvětší množství bakterií za určitou dobu (x), lze za určitých podmínek vyjádřit exponenciální funkcí $y = a^x$, kde $x \geq 0$.

V laboratorním experimentu se během každých 2 hodin ($x = 2$) množství bakterií zvětší čtyřikrát ($y = 4$).

(CERMAT)

4 **Kolikrát se změní množství bakterií během 6 hodin laboratorního experimentu?**

A) dvanáctkrát

B) šestnáctkrát

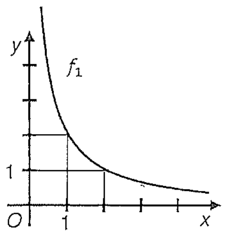
C) čtyřiadvacetkrát

D) osmačtyřicekrát

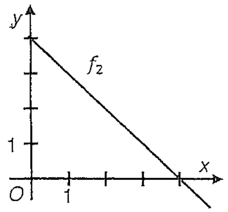
E) čtyřiašedesátkrát

Řešení: E

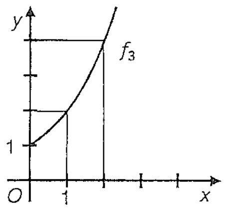
5 Přiřaďte ke každému grafu funkce f_1–f_4 (5.1–5.4) pro $x \in (0; +\infty)$ odpovídající předpis funkce (A–F).

5.1


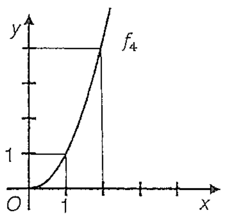
f_1 ____

5.2


f_2 ____

5.3


f_3 ____

5.4


f_4 ____

A) $y = 2^x$

B) $y = -4x$

C) $y = \log x$

D) $y = \frac{2}{x}$

E) $y = x^2$

F) $y = 4 - x$

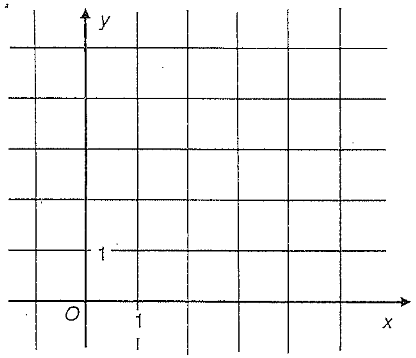
Řešení: D, F, A, E

4. Funkce

VÝCHOZÍ TEXT, TABULKA A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Funkce f je dána předpisem $y = \frac{2}{x}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

x	1	2
y		



(CERMAT)

1

1.1 V tabulce doplňte chybějící hodnoty funkce.

1.2 Sestrojte graf funkce f pro $x > 0$.

1.3 Určete, pro kterou hodnotu proměnné x je $y = \frac{1}{2}$.

2 Vypočtěte obě souřadnice bodu P, v němž se protínají grafy funkcí f a g:

2.1 $f: 2x - y + 4 = 0$

$g: 2x + 3y - 4 = 0$

2.2 $f: y = 2x - 9$

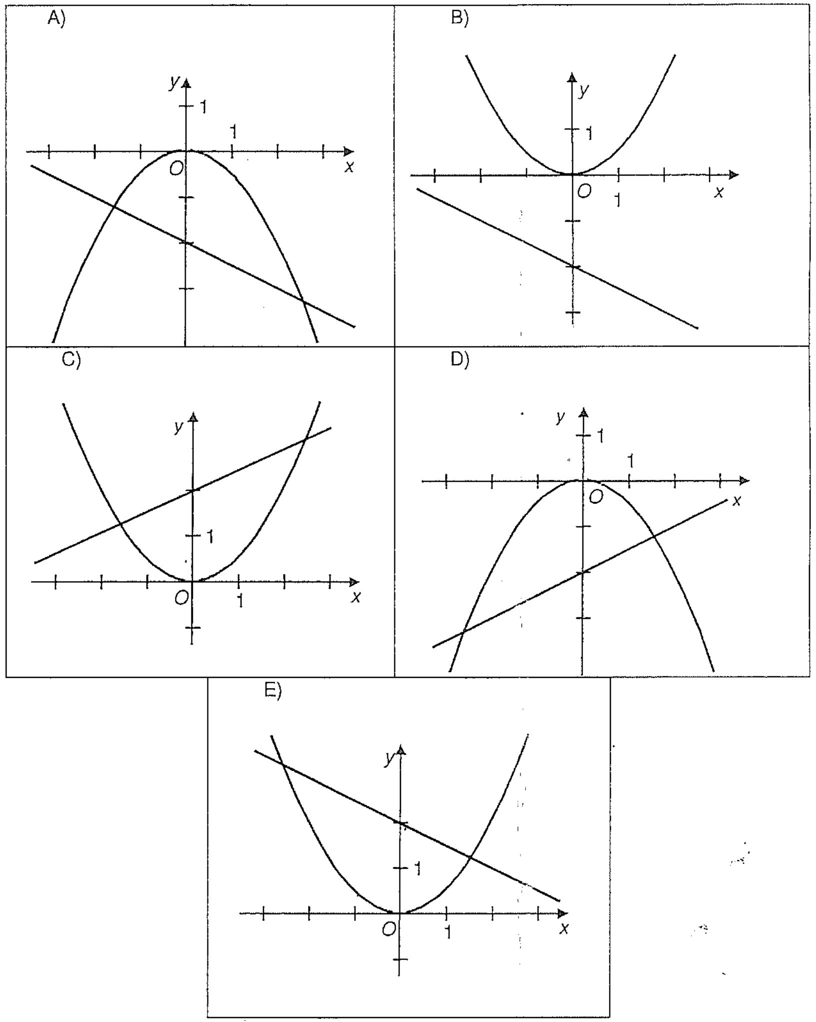
$g: y = 3 - 2x$

3 Funkce f a g jsou určeny předpisy:

$f: y = 0{,}5x^2$

$g: y = 2 - 0{,}5x$

Na kterém z obrázků A – E jsou správně sestrojeny grafy obou funkcí?



5 Grafem kvadratické funkce $f: y = x^2 - 6x$ je parabola s vrcholem $V[m; n]$.

Jakou hodnotu má druhá souřadnice n vrcholu V?

A) $n = -9$

B) $n = -6$

C) $n = -3$

D) $n = 0$

E) $n = 6$

---

6 **V oboru R řešte:**

6.1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 4^x$

6.2 $5^3 \cdot 5^9 = (5^x)^3$

6.3 $5^{3y} = 5 \cdot 5^y$

---

7 **Pro $a > 0$ vypočtěte:**

$\log\frac{4}{a} - \log 400 + \log a =$

---

8 **V oboru R řešte:**

8.1 $\log 2 - \log x = 1$

8.2 $\log_3 x + \log_3 27 = 1$

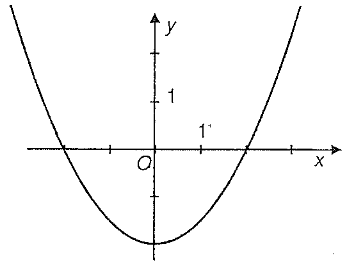
8.3 $\log 0{,}1 + \log(2x) = 1$

8.4 $\log_2 2x - \log_2 8 = 1$

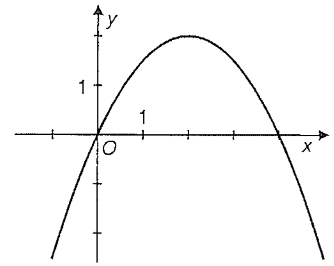
8.5 $\log 1000 + \log x = 4$

4 **Přiřaďte ke každému grafu funkce (4.1–4.3) odpovídající předpis funkce (A–E).**

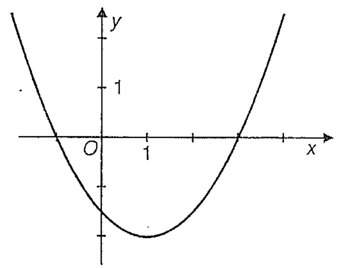
4.1



4.2



4.3



A) $y = \frac{x}{2}(4 - x)$

B) $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$

C) $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$

D) $y = \frac{x^2}{2} - 2x$

E) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$

4.1 _____

4.2 _____

4.3 _____

Úloha 13 Zjednodušte daný výraz pro $w > 0$:

$\log_3(2w) - \log_3 30 + \log_3 \frac{5}{3w}$

Úloha 14 V oboru **R** řešte rovnice s neznámou x.

a) $\sqrt{4^x} = \frac{4^{3x}}{16}$

b) $\frac{5^x + 5^{x+1}}{5} = 150$

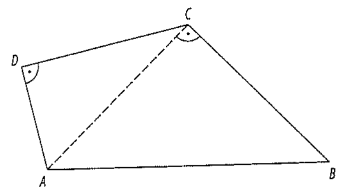
c) $6^{3-x} = 100$

d) $\log_7 14 = 2 + \log_7(x-1)$

Úloha 15 Při fyzikálním experimentu byla voda v nádobě přivedena k varu. Poté byla nádoba z vařiče stáhnuta a utěsněna. Voda začala chladnout. Měřením bylo zjištěno, že v určitém intervalu je teplota vody t [°C] závislá na době x [min], po kterou chladne, přibližně podle funkčního předpisu $t = 60 \cdot e^{-0{,}025x} + 30$.
Jaký je pokles teploty (**zaokrouhleno na celé stupně Celsia**) mezi třicátou a padesátou minutou od počátku měření?

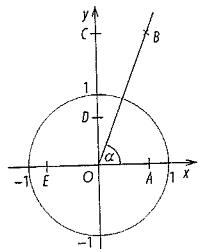
A) 11 °C B) 20 °C C) 47 °C D) 58 °C E) 66 °C

Úloha 16 V čtyřúhelníku $ABCD$ platí: $|AC| = 44{,}3$; $|CD| = 34{,}9$;
$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB| = 90°$; $|\sphericalangle BAD| = 106°$



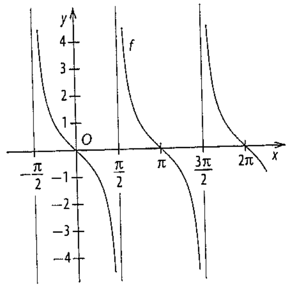
a) Vypočítejte velikosti úhlů CAB a ABC s přesností **na celé stupně.**
b) Převeďte velikosti úhlů CAB a ABC (po zaokrouhlení na celé stupně) na obloukovou míru.
c) Vypočítejte délku strany AB. Výsledek **zaokrouhlete na desetiny.**

Úloha 17 Na obrázku je v soustavě souřadnic vyznačena jednotková kružnice a úhel α.
Která velikost úsečky odpovídá hodnotě $\sin 2\alpha$?



A) $|OA|$
B) $|OB|$
C) $|OC|$
D) $|OD|$
E) $|OE|$

Úloha 18 Na obrázku je graf goniometrické funkce f.
Který předpis funkce odpovídá grafu na obrázku?



A) $f\colon y = \mathrm{tg}\, x$
B) $f\colon y = -\mathrm{tg}\, x$
C) $f\colon y = \mathrm{cotg}\, x$
D) $f\colon y = -\mathrm{cotg}\, x$
E) $f\colon y = -x^3$

Úloha 19 Zadanou rovnici řešte na intervalu $\langle 0; 2\pi)$. Výsledek uveďte **v radiánech.**

$2\cos x = -\sin^2 x - \cos^2 x$

Úloha 20 Pro $t \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbf{Z}$, upravte daný výraz na co nejjednodušší tvar.

$\frac{3\sin 2t}{1 + \cos 2t}$

5. Posloupnosti a finanční matematika

Klíč na s. 93–95

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Posloupnosti a finanční matematika, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech
- aplikovat znalosti o funkcích při úvahách o posloupnostech a při řešení úloh o posloupnostech;
- určit posloupnost vzorcem pro n-tý člen, graficky a výčtem prvků.

5.2 Aritmetická posloupnost
- určit aritmetickou posloupnost a chápat význam diference;
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost.

5.3 Geometrická posloupnost
- určit geometrickou posloupnost a chápat význam kvocientu;
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost.

5.4 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe, finanční matematika
- užít poznatky o posloupnostech při řešení problémů v reálných situacích;
- řešit úlohy z oblasti finanční matematiky.

(Zdroj: http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1; upraveno)

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Posloupnosti a finanční matematika najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:
- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 20–23)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 20–23)
- Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti a řady (připravujeme)

Úloha 01 Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zadaná vzorcem pro n-tý člen $a_n = 2 - n^2$; $n \in \mathbf{N}$.
Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Grafem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou body, které leží na parabole.	ANO	NE
2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající.	ANO	NE
3. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.	ANO	NE
4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená.	ANO	NE

Úloha 02 Vzorec pro n-tý člen posloupnosti je $a_n = 2^n + 2$, kde $n \in \mathbf{N}$. Určete:

a) $\frac{a_5 - a_1}{a_3 - a_1}$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n - 1}$

Úloha 03 Jestliže od padesátého členu aritmetické posloupnosti odečteme její dvacátý člen, získáme její třicátý člen, o kterém víme, že je roven 123. Určete první člen posloupnosti.

Úloha 04 V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{100}$ je stý člen a_{100} čtyřikrát větší než první člen a_1 a součet prvních sto členů je roven 5 500. Vypočítejte 25. člen posloupnosti a_{25}.

Úloha 05 Jaký je součet všech přirozených čísel větších než 8 a menších než 8 888, která jsou dělitelná třemi?

A) 39 498 240 B) 26 329 200 C) 13 164 600 D) 8 888 888 E) jiná hodnota

Úloha 06 Zapište $\frac{1+3+5+\ldots+1999+2001}{2+4+6+\ldots+2000+2002}$ ve tvaru **zlomku v základním tvaru.**

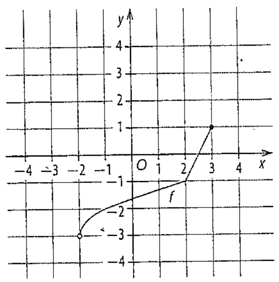
Úloha 07 Řešte v oboru reálných čísel rovnici $8x + 9x + 10x + \ldots + 291x + 292x = 171$.
Výsledek vyjádřete ve tvaru **desetinného čísla.**

Úloha 08 V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = -0{,}2$ platí $a_{99} \cdot a_{100} \cdot a_{101} = 1\,000\,000$.
Které z následujících tvrzení je pro rozdíl $a_{100} - a_{99}$ pravdivé?

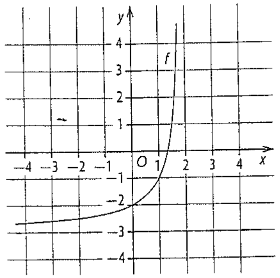
A) $a_{100} - a_{99} < 0$
B) $0 \leq a_{100} - a_{99} < 200$
C) $200 \leq a_{100} - a_{99} < 400$
D) $400 \leq a_{100} - a_{99} < 600$
E) $600 \leq a_{100} - a_{99} < 800$

Úloha 01 Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Určete definiční obor funkce a obor hodnot funkce. Dále určete, pro které x z definičního oboru platí $f(x) = -1$.

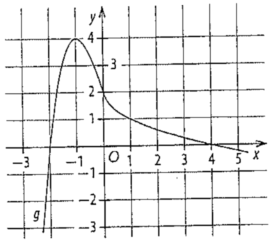
a)



b)



Úloha 02 Na obrázku je graf funkce $y = g(x)$. Které z následujících tvrzení **není** pravdivé?

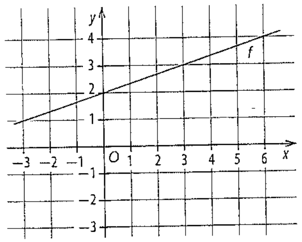


A) Funkce $g(x)$ je na intervalu $(-\infty; -1\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle -1; \infty)$ klesající.
B) Funkce $g(x)$ má se souřadnicovými osami právě tři průsečíky: $P_1[-2; 0]$, $P_2[4; 0]$ a $P_3[0; 2]$.
C) Pro $x_0 = 1 - \sqrt{3}$ platí $g(x_0) > 2$.
D) Pro všechna x z definičního oboru platí $g(x) < 5$.
E) Funkce $g(x)$ nabývá maxima v bodě $x = 4$.

Úloha 03 Graf přímé úměrnosti f a graf nepřímé úměrnosti g se protínají v bodě $P\left[\frac{3}{2}; 3\right]$.
Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Přímá úměrnost je dána předpisem $f\colon y = 2x$. ANO ☐ NE ☐
2. Nepřímá úměrnost je dána předpisem $g\colon y = \frac{0{,}5}{x}$. ANO ☐ NE ☐
3. Pro $x > 0$ je bod P jediným průsečíkem grafů f a g. ANO ☐ NE ☐
4. Pro $x > 0$ jsou obě funkce f a g rostoucí. ANO ☐ NE ☐

Úloha 04 Na obrázku je graf lineární funkce $f\colon y = ax + b;\ a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{Z}$.



a) Určete hodnotu parametru b.
b) Sestrojte graf funkce $g\colon y = ax - 1$.
c) Sestrojte graf funkce $h\colon y = -ax + 2$.

Úloha 05 Mobilní operátor nabízí tarif „SMS zdarma". Za tarif zaplatíte pevnou částku 75 Kč měsíčně a dále 5,50 Kč za každou provolanou minutu do jakékoli sítě. Veškeré SMS jsou v rámci tarifu za 0 Kč.

a) Sestavte předpis funkce f, který udává závislost celkové měsíční platby y na počtu provolaných minut x.
b) Vypočítejte, kolik minut jste v daném tarifu provolali, jestliže celková měsíční platba činila 449 Kč.

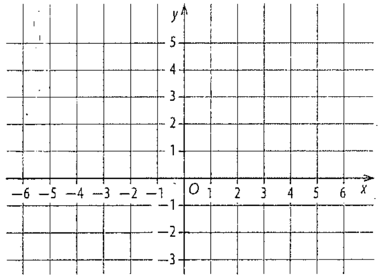
Úloha 06 Z naplněného obilného sila se každý den odváží stejné množství obilí. Po pěti dnech zbývá v silu 700 t obilí, po čtrnácti dnech 520 t. Najděte předpis lineární funkce $y = ax + b$, která vyjadřuje závislost množství obilí y v silu na počtu dní x, po které je silo vyprazdňováno.

Úloha 07 Při úpravách parku navrhuje zahradní architekt spojit dolní část parku s vyhlídkou schody. Při zachování celkové výšky schodiště má na výběr mezi třemi typy schodišťových stupňů.

	typ 1	typ 2	typ 3
výška schodišťového stupně [mm]	150	165	
počet stupňů		60	55

a) Doplňte tabulku.
b) Sestavte předpis funkce f vyjadřující závislost počtu stupňů y na výšce stupně x udanou v milimetrech.

Úloha 08 Kvadratická funkce f má tyto vlastnosti:



- $H(f) = \langle -2; \infty)$
- Funkce f je na intervalu $(-\infty; 3\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 3; \infty)$ rostoucí.
- Pro argument $x = 2$ nabývá funkce f funkční hodnoty -1.

a) Sestrojte graf funkce f.
b) Sestavte předpis funkce f ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$.

Úloha 09 Grafem kvadratické funkce f je parabola s vrcholem V, grafem kvadratické funkce g je parabola s vrcholem W. Přiřaďte ke každé dvojici funkcí f a g (1.–3.) odpovídající pravdivé tvrzení o jejich vrcholech (A)–E)).

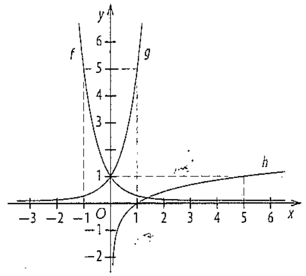
1. $f\colon y = -2x^2 - 1;\ g\colon y = 0{,}25x^2 + 1$
2. $f\colon y = 3x^2 + 6x;\ g\colon y = x^2 + 4x$
3. $f\colon y = (x+2)^2;\ g\colon y = x^2 - 2x + 1$

A) Vrcholy V a W leží na ose x.
B) Vrcholy V a W leží na ose y.
C) Vrcholy V a W mají kladnou x-ovou souřadnici.
D) Vrcholy V a W mají zápornou x-ovou souřadnici.
E) Vrcholy V a W mají kladnou y-ovou souřadnici.

Úloha 10 Zahrádkář pěstuje zeleninu na obdélníkovém záhonu o rozměrech 10 m × 6 m. Rozměry se rozhodl změnit tak, že delší stranu o x metrů zmenší a kratší o x metrů prodlouží.

a) Sestavte předpis funkce f, která vyjadřuje závislost velikosti plochy záhonu y na změně délky strany x.
b) Určete definiční obor funkce f.
c) Určete změnu délky x_m tak, aby velikost plochy záhonu byla co největší.

Úloha 11 Na obrázku jsou grafy dvou exponenciálních funkcí $f\colon y = a^x$ a $g\colon y = b^x$, dále graf logaritmické funkce $h\colon y = \log_c x$. Které z následujících tvrzení je pravdivé?



A) $a > b > c$
B) $a = c$
C) Funkce h je inverzní k funkci f.
D) Funkce h je inverzní k funkci g.
E) Grafy funkcí g a h jsou souměrně sdružené ve středové souměrnosti podle počátku soustavy souřadnic Oxy.

Úloha 12 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (1.–4.) odpovídající definiční obor a obor hodnot (A)–F)).

1. $f\colon y = 5 \cdot 2^x$
2. $f\colon y = \log_5(x+2)$
3. $f\colon y = \frac{5}{x+2}$
4. $f\colon y = \cos x$

A) $D(f) = (-2; \infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
B) $D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
C) $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1; 1\rangle$
D) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$, $H(f) = \mathbf{R}$
E) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$, $H(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
F) $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0; \infty)$

Testové úlohy k tematickým celkům

Úloha 06

$y = -20x + 800;\ x \in \mathrm{N}$

Ze zadání vyplývá, že pro $x_1 = 5$ nabývá lineární funkce hodnoty $y_1 = 700$, pro $x_2 = 14$ pak hodnoty $y_2 = 520$. Postupně dosadíme tyto hodnoty do předpisu $y = ax + b$ lineární funkce a řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$700 = 5a + b$

$520 = 14a + b$

Úloha 07

a)

	typ 1	typ 2	typ 3
výška schodišťového stupně [mm]	150	165	180
počet stupňů	66	60	55

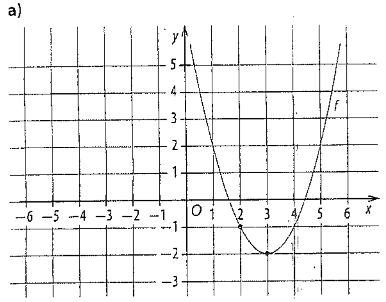
Jedná se o nepřímou úměru.

b) $y = \frac{9\,900}{x}$

Uspořádanou dvojici $[165; 60]$ dosadíme do vztahu $y = \frac{k}{x}$ a vypočítáme k.

Úloha 08

a)



Grafem kvadratické funkce je parabola. Z prvních dvou vlastností určíme souřadnice vrcholu. Třetí vlastnost udává souřadnice bodu ležícího na parabole. Tento bod určuje tvar paraboly.

b) $y = x^2 - 6x + 7$

Protože známe souřadnice vrcholu $V[3; -2]$ kvadratické funkce, vyjdeme z vrcholové rovnice $y = a\cdot(x-3)^2 - 2$, do níž dosadíme souřadnice bodu $[2; -1]$, kterým graf kvadratické funkce prochází, a vypočítáme hodnotu koeficientu a ($a = 1$). Následně předpis $y = (x-3)^2 - 2$ upravíme na tvar kvadratického trojčlenu.

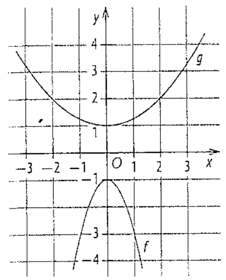
Úloha 09

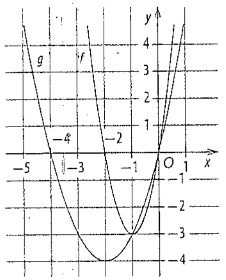
Zadané předpisy kvadratických funkcí podle potřeby upravíme na tvar, ze kterého dokážeme načrtnout grafy těchto funkcí (viz obrázky níže).

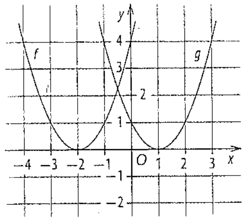
1. B)

2. D)

3. A)







Úloha 10

a) $f\colon y = (10 - x)\cdot(x + 6)$

Delší strana obdélníku má po změně délku $(10 - x)$, kratší strana má délku $(x + 6)$. Velikost plochy obdélníku y vypočítáme jako součin délek jeho stran.

b) $D(f) = (0; 10)$

Rozměry obdélníku nelze změnit o více než deset metrů.

c) $x_m = 2$ m

Funkce f je kvadratická, jejím grafem je parabola. Vypočítáme x-ovou souřadnici vrcholu paraboly. Největší plocha záhonu je při změně délek o 2 metry.

Úloha 11

D)

Z grafů funkcí stanovíme pomocí souřadnic vyznačených bodů hodnoty parametrů: $a = \frac{1}{5}, b = 5, c = 5$. Dále využijeme definici logaritmické funkce.

Úloha 12

1. F)

Využijeme vlastnosti exponenciální funkce.

2. A)

Využijeme vlastnosti logaritmické funkce. Definiční obor stanovíme řešením podmínky $(x + 2) > 0$ (logaritmovaný výraz musí být kladný).

3. E)

Využijeme vlastnosti lineární lomené funkce. Definiční obor stanovíme řešením podmínky $(x + 2) \neq 0$ (ve jmenovateli zlomku nesmí být nula). Obor hodnot určíme např. porovnáním předpisu zadané lineární lomené funkce s předpisem $f\colon y = \frac{k}{x - m} + n$, kde $k, m, n \in \mathrm{R}$, pro jejíž obor hodnot platí $H(f) = \mathrm{R} - \{n\}$.

4. C)

Využijeme vlastnosti goniometrické funkce kosinus.

Úloha 13

-2

Výraz nejprve upravíme pomocí vět pro počítání s logaritmy.

Pro všechna $u,\ v \in \mathrm{R}^+$ a každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ platí:

$\log_a u + \log_a v = \log_a (u\cdot v)$

$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$

Poté využijeme definici logaritmu. Pro každé $u \in \mathrm{R}^+$, každé $z \in \mathrm{R}$ a každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ platí: $\log_a u = z \Leftrightarrow a^z = u$

Úloha 14

a) $x = \frac{4}{5}$

Pomocí vzorců pro počítání s mocninami a odmocninami rovnici upravíme na tvar $4^{\frac{x}{2}} = 4^{3x-2}$. Porovnáním exponentů získáme lineární rovnici $\frac{x}{2} = 3x - 2$, kterou vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav.

b) $x = 3$

Vynásobením obou stran rovnice číslem 5 odstraníme zlomky. Levou stranu rovnice upravíme pomocí vzorců pro počítání s mocninami a vytknutím následovně:

$5^x + 5^{x+1} = 5^x + 5^x\cdot 5^1 = 5^x\cdot(1+5) = 6\cdot 5^x$

c) $x = 3 - \frac{2}{\log 6}$

Rovnici řešíme logaritmováním. Umocnění na exponent obsahující neznámou odstraníme s využitím vzorce pro logaritmus mocniny. Pro všechna $u \in \mathrm{R}^+$, každé $z \in \mathrm{R}$ a každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ platí $\log_a u^z = z\cdot\log_a u$. Následně neznámou x vyjádříme pomocí ekvivalentních úprav.

d) $x = \frac{9}{7}$

Číslo 2 nahradíme logaritmem o základu 7, tj. $2 = \log_7 7^2$. Pravou stranu rovnice upravíme s využitím vzorce pro součet logaritmů. Pro všechna $u,\ v \in \mathrm{R}^+$ a každé $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ platí $\log_a u + \log_a v = \log_a (u\cdot v)$. Po odlogaritmování řešíme lineární rovnici $14 = 49\cdot(x - 1)$. Nalezené řešení porovnáme s podmínkami nebo provedeme zkoušku.

Úloha 15

A)

Určíme funkční hodnoty pro $x_1 = 30$ a $x_2 = 50$ tím, že uvedené hodnoty dosadíme do předpisu funkce. Získané funkční hodnoty od sebe odečteme.

Úloha 16

a) $|\sphericalangle CAB| \doteq 54°,\ |\sphericalangle CBA| \doteq 36°$

V pravoúhlém trojúhelníku ACD spočítáme pomocí funkce sinus nejprve velikost úhlu CAD.

b) $|\sphericalangle CAB| \doteq \frac{3\pi}{10},\ |\sphericalangle CBA| \doteq \frac{\pi}{5}$

Velikost úhlu 180° ve stupňové míře je rovna velikosti úhlu π v obloukové míře.

c) $|AB| \doteq 75{,}4$

Pro výpočet délky strany AB využijeme definici funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Úloha 17

D)

Do soustavy souřadnic vyneseme úhel 2α tak, že první rameno úhlu splývá s kladnou poloosou x. S ohledem na velikost zadaného úhlu α je zřejmé, že druhé rameno protíná jednotkovou kružnici v II. kvadrantu. Využijeme definici funkce sinus.

Úloha 18

B)

Jedná se o klesající funkci (vylučuje možnosti A) a D)), která není definována pro liché násobky $\frac{\pi}{2}$ (ze zbylých možností vylučuje C) a E)).

Úloha 19

$K = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$, příp. $x_1 = \frac{2\pi}{3};\ x_2 = \frac{4\pi}{3}$

Pravou stranu rovnice upravíme pomocí vzorce pro goniometrickou jedničku. Pro všechna $x \in \mathrm{R}$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Následně řešíme goniometrickou rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Úloha 20

$3\,\mathrm{tg}\,t$

Výraz nejprve upravíme pomocí vzorců pro dvojnásobný úhel. Pro všechna $x \in \mathrm{R}$ platí $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Poté využijeme vzorec pro goniometrickou jedničku. Pro všechna $x \in \mathrm{R}$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. Posloupnosti a finanční matematika

Úloha 01

1. ANO

Grafem kvadratické funkce $f(n) = 2 - n^2;\ n \in \mathrm{R}$, je konkávní parabola s vrcholem v bodě $[0; 2]$. Definičním oborem posloupnosti je množina přirozených čísel, grafem posloupnosti jsou proto body ležící na parabole.

2. ANO

Pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí $a_{n+1} - a_n = 2 - (n+1)^2 - 2 + n^2 = -1 - 2n < 0$, a tedy $a_{n+1} < a_n$.

3. NE

Pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2-(n+1)^2}{2-n^2} = \frac{1-n^2-2n}{2-n^2}$.

Poměr $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ není konstantní.

4. NE

Je zřejmé z grafu posloupnosti (viz komentář k úloze 01.1).

Úloha 02

a) 5

Dosazením do vzorce pro n-tý člen stanovíme hodnoty daných členů posloupnosti, tj. $a_5 = 2^5 + 2 = 34$, $a_3 = 2^3 + 2 = 10$, $a_1 = 2^1 + 2 = 4$, a pomocí nich stanovíme hodnotu zadaného výrazu.

b) 2

Dosazením do vzorce pro n-tý člen stanovíme hodnotu $(n+1)$. členu posloupnosti, tj. $a_{n+1} = 2^{n+1} + 2 = 2\cdot(2^n + 1)$. Toto vyjádření dosadíme do zadaného výrazu a upravíme jej krácením.

Úloha 03

$a_1 = 4{,}1$

Využijeme vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Ze zadání vyplývá $a_{30} = a_{50} - a_{20} \Leftrightarrow a_1 + 29d = a_1 + 49d - (a_1 + 19d)$

$a_{30} = a_1 + 29d \Leftrightarrow a_1 + 29d = 123$. Soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé a_1 a d vyřešíme.

Úloha 04

$a_{25} = 38$

Využijeme vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ a vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$.

Ze zadání vyplývá:

$a_{100} = 4a_1 \Leftrightarrow a_1 + 99d = 4a_1$

$s_{100} = 5\,500 \Leftrightarrow 5\,500 = \frac{100}{2}\cdot(a_1 + a_{100}) \Leftrightarrow 5\,500 = 50\cdot(a_1 + 4a_1)$

Ze známého prvního členu a_1 a diference d stanovíme člen a_{25}.

Úloha 05

C)

Čísla tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 9$, $a_n = 8\,886$, $d = 3$. Pomocí vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ určíme $n = 2\,960$. Použijeme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$.

Úloha 06

$\frac{1001}{1002}$

Čitatele tvoří součet n členů aritmetické posloupnosti ($a_1 = 1$, $a_n = 2\,001$, $d = 2$, $n = 1\,001$). Použijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$.

Analogicky i pro jmenovatele ($a_1 = 2$, $a_n = 2\,002$, $d = 2$, $n = 1\,001$).

Úloha 07

$K = \{0{,}004\}$, příp. $x = 0{,}004$

Levou stranu rovnice tvoří součet n členů aritmetické posloupnosti ($a_1 = 8x$, $a_n = 292x$, $d = x$, $n = 285$). Použijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$.

3. Rovnice a nerovnice

Úloha 01

1. ANO
Jedinou neznámou je x; symbol π zastupuje konstantu.

2. NE
Jen celá kladná čísla jsou současně čísla přirozená.

3. NE
Tvrzení by bylo pravdivé jen za předpokladu, že i definičním oborem rovnice je množina **R**.

4. NE
Množinou řešení jsou ta x, pro která platí $|x| < 2$, tj. $x \in (-2; 2)$.

Úloha 02

a) $\frac{x^2}{5} - 1 = \left(\frac{x}{5}\right)^2$

b) $K = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$
Ekvivalentními úpravami rovnice z úlohy 02 a) získáme ryze kvadratickou rovnici $x^2 - \frac{25}{4} = 0$, kterou můžeme řešit rozkladem na součinový tvar nebo odmocněním, přičemž platí $x = \sqrt{\frac{25}{4}} = \left|\frac{5}{2}\right| = \pm\frac{5}{2}$.

c) $L\left(-\frac{5}{2}\right) = P\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $L\left(\frac{5}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$
Zkoušku provedeme pro obě nalezená řešení.

Úloha 03

1. ANO
K oběma stranám rovnice je přičteno číslo 3.

2. NE
Dělení výrazem s neznámou není ekvivalentní úpravou. Daná rovnice a rovnice získaná po vydělení výrazem $(x-1)$ mají jiný definiční obor. Původní rovnice má kořen 1, rovnice po úpravě nemá řešení.

3. ANO
K oběma stranám rovnice je přičten výraz $(5x+5)$ a obě strany rovnice jsou vynásobeny číslem $\frac{5}{7}$. Obě úpravy jsou ekvivalentní.

4. NE
Umocnění obou stran rovnice na druhou není ekvivalentní úpravou. Původní rovnice má kořen 1, rovnice po úpravě má dva kořeny, a to čísla -1 a 1.

Úloha 04

60 km
Porovnáme skutečný čas (v hodinách) potřebný k cestě tam a zpět s potřebným časem při stálé rychlosti 16 km · h^{-1}, tzn. řešíme rovnici $\frac{s}{20} + \frac{s}{12} - 0{,}25 = \frac{2s}{16}$, kde neznámá s označuje vzdálenost Petrova a Pavlova bydliště. Celkem ujel vzdálenost $2s$.

Úloha 05

A)
Čísla m, n jsou kořeny kvadratické rovnice. Podle Viètových vztahů platí: $m + n = -\frac{b}{a}$, kde $a = 1$ je koeficient u kvadratického členu a $b = 9$ je koeficient u lineárního členu kvadratické rovnice.

Úloha 06

a) $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, příp. $D = \mathbf{R} - \{-2; 2\}$
Ve jmenovateli všech zlomků musí být nenulové číslo, tzn. $x \neq \pm 2$.

b) $K = \{-7\}$
Řešení rovnice vede na kvadratickou rovnici, kterou můžeme upravit na součinový tvar $(x+7)\cdot(x-2) = 0$. Kořen $x_2 = 2$ nevyhovuje.

Úloha 07

D)
Za podmínek $x \neq -3$ a $x \neq -1$ lze rovnici upravit na součinový tvar $x \cdot (x+4) = 0$.

Úloha 08

a) $-\frac{8}{3}$
Označíme neznámé číslo x a řešíme rovnici $\frac{2}{3} + x = \frac{2+x}{3+x}$, která má jediné nenulové řešení.

b) -2
Hodnotu $-\frac{8}{3}$ nalezenou v úloze 08 a) dosadíme do levé nebo pravé strany rovnice $\frac{2}{3} + x = \frac{2+x}{3+x}$ a vypočítáme výslednou hodnotu výrazu.

Úloha 09

C)
Ekvivalentními úpravami lze rovnici převést na součinový tvar $(y+2)^2 \cdot (y-2) \cdot (y^2+4) \cdot (y+\sqrt{2}) \cdot (y-\sqrt{2}) = 0$. Nulovými body rovnice jsou čísla -2; 2; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. V zadaném definičním oboru rovnice leží jen řešení -2 a 2.

Úloha 10

C)
Za podmínek $x \neq -8$ a $x \neq 1$ lze rovnici upravit na součinový tvar $(v+3) \cdot (v^2 - 3v + 9) = 0$. Řešením je číslo -3.

Úloha 11

1. NE
Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat následovně $K = \{[x; 5x-1]; x \in \mathbf{R} - \{-2\}\}$. Grafickým řešením soustavy jsou kromě bodu $[-2; -11]$ splývající přímky. Jedná se o rovnoběžné totožné přímky.

2. ANO
Soustava rovnic nemá řešení, tzn. $K = \emptyset$. Grafickým řešením soustavy jsou rovnoběžné různé přímky.

3. NE
Soustava rovnic má právě jedno řešení $K = \left\{\left[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right]\right\}$. Grafickým řešením soustavy jsou dvě různoběžné přímky.

4. NE
Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat následovně $K = \left\{\left[x; \frac{3}{2}x - 1\right]; x \in \mathbf{R}\right\}$. Grafickým řešením soustavy jsou rovnoběžné totožné přímky.

Úloha 12

$K = \{[-1; 1]\}$, příp. $x = -1$; $y = 1$
Porovnáním exponentů získáme soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$3x + 3 + y = 1$$
$$2x = 1 - 2 - y$$

Úloha 13

A)
Ekvivalentními úpravami vyjádříme proměnnou a.

Úloha 14

E)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na podílový tvar $\frac{1-x}{x} \geq 0$.
Množinou všech řešení nerovnice je $K = (0; 1\rangle$.

Úloha 15

1. A)
Kořen $u = 1$ nepatří do definičního oboru rovnice.

2. C)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na tvar $0 \leq 0$. Rovnost mezi levou a pravou stranou platí pro všechna u z definičního oboru, tj. pro $u \in \mathbf{R} - \{1\}$.

3. D)
Pomocí ekvivalentních úprav převedeme nerovnici na podílový tvar $\frac{2 \cdot (x-2)}{x-1} \geq 0$. Její řešení stanovíme např. pomocí nulových bodů.

Úloha 16

$K = \{1\}$, příp. $n = 1$
Za podmínky $n \neq 2$ lze nerovnici převést na součinový tvar $(n-2) \cdot (n+2) \leq 0$. Jejím řešením je interval $\langle -2; 2)$. V daném intervalu leží jediné přirozené číslo.

Úloha 17

E)
Vyřešíme každou nerovnici zvlášť a stanovíme průnik jejich řešení, tj. průnik intervalů $K_1 = (-\infty; -2\rangle$ a $K_2 = (-\infty; 2\rangle$. Řešením je $K = (-\infty; -2\rangle$.

Úloha 18

a) 32 žáků
Neznámou x označíme celkový počet žáků ve třídě na začátku školního roku.
Sestavíme a řešíme rovnici $\left(\frac{x}{2} - 1\right) : \left(\frac{x}{2} - 6\right) = 3 : 2$.

b) 60 %
Poměr dívek a chlapců činí na konci školního roku 3 : 2, tzn. počet dívek tvoří 3 díly z 5 dílů, tj. $\frac{3}{5} = 0{,}6$, tj. 60 %.

Úloha 19

2 l
Jedná se o řešení slovní úlohy „o směsích". Sestavíme a řešíme rovnici $V_1 \cdot t_1 + V_2 \cdot t_2 = (V_1 + V_2) \cdot t$ s neznámým objemem V_2.

Úloha 20

a) o 6 Kč
S využitím souřadnic bodů A a C stanovíme cenu papírové jízdenky (18 Kč), pomocí souřadnic bodů B a D stanovíme cenu městské karty (90 Kč) a cenu levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč).

b) 16 jízd
Výslednou hodnotu lze vyčíst z grafu, příp. určit početně. Cena papírové jízdenky (18 Kč), cena měsíční karty (90 Kč) a cena levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč) viz 20 a). Dále řešíme nerovnici $90 + 12x < 18x$; $x \in \mathbf{N}_0$.

c) 28 jízd
Pomocí vyznačeného bodu E stanovíme cenu časové měsíční jízdenky (420 Kč). Cena měsíční karty (90 Kč) a cena levnější jízdy s městskou kartou (12 Kč) viz 20 a). Dále řešíme nerovnici $420 < 90 + 12x$; $x \in \mathbf{N}_0$. Vypočítanou hodnotu lze ověřit i v grafu.

4. Funkce

Úloha 01

Definiční obor funkce zjišťujeme na ose x, obor hodnot na ose y.

a) $D(f) = (-2; 3\rangle$, $H(f) = (-3; 1\rangle$, $x = 2$

b) $D(f) = (-\infty; 2)$, $H(f) = (-3; \infty)$, $x = 1$

Úloha 02

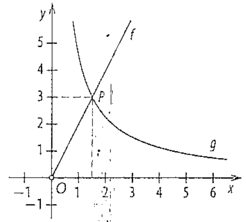
E)
Funkce $g(x)$ nabývá maxima v bodě $x = -1$. Platí $g(-1) = 4$.

Úloha 03

1. ANO
Souřadnice bodu P dosadíme do předpisu přímé úměrnosti $y = kx$ a vypočítáme hodnotu k.

2. NE
Souřadnice bodu P dosadíme do předpisu nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$ a vypočítáme hodnotu k ($k = 4{,}5$).

3. ANO
Vyplývá např. z grafů funkcí f a g pro $x > 0$.



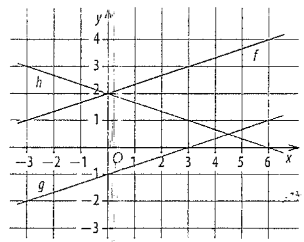
4. NE
Funkce g je klesající (viz graf výše).

Úloha 04

a) $b = 2$
Hodnotu parametru b odečteme na ose y.

b)
Protože parametr a je u funkcí f a g stejný, přímky představující grafy těchto funkcí jsou rovnoběžné (viz obrázek níže).

c)
Přímky představující grafy funkcí f a h jsou souměrně sdružené v osové souměrnosti podle osy y (viz obrázek níže). Lze také dosadit bod $[3; 3]$ ležící na přímce představující graf funkce f do předpisu $y = ax + 2$ a určit hodnotu parametru a.



Úloha 05

a) $f: y = 5{,}5x + 75$; $x \in \mathbf{N}$
Za x provolaných minut zaplatí zákazník $5{,}5x$ Kč. Měsíční platbu y tvoří součet částky za provolané minuty a 75 Kč za tarif.

b) 68
Řešíme rovnici $449 = 5{,}5x + 75$ pro $x \in \mathbf{N}$.