6. Planimetrie

Klíč na s. 95–98

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Planimetrie, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

6.1 Planimetrické pojmy a poznatky
- užít pojmy bod, přímka, polopřímka, rovina, polorovina, úsečka, úhly (vedlejší, vrcholové, střídavé, souhlasné), znázornit objekty;
- užít s porozuměním polohové a metrické vztahy mezi geometrickými útvary v rovině (rovnoběžnost, kolmost a odchylka přímek, délka úsečky a velikost úhlu, vzdálenost bodů a přímek);
- rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, popsat jejich vlastnosti a správně jich využít;
- užít poznatky o množinách všech bodů dané vlastnosti v konstrukčních úlohách.

6.2 Trojúhelníky
- určit objekty v trojúhelníku, znázornit je a správně využít jejich základní vlastnosti, užít pojmy s porozuměním (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, výšky, ortocentrum, těžnice, těžiště, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná);
- využít věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků při řešení početních i konstrukčních úloh;
- užít s porozuměním poznatky o trojúhelnících (obvod, obsah, velikost výšky, Pythagorova věta, poznatky o těžnicích a těžišti) v úlohách početní geometrie;
- řešit úlohy s užitím trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku a obecného trojúhelníku (sinová věta, kosinová věta, obsah trojúhelníku určeného sus).

6.3 Mnohoúhelníky
- rozlišit základní druhy čtyřúhelníků (různoběžník, rovnoběžník, lichoběžník), popsat jejich vlastnosti a správně jich využít;
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní pojmy týkající se čtyřúhelníku (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, kružnice opsaná a vepsaná, úhlopříčky, výšky);
- popsat, znázornit a využít vlastnosti konvexních mnohoúhelníků a pravidelných mnohoúhelníků;
- užít s porozuměním poznatky o čtyřúhelnících (obvod, obsah, vlastnosti úhlopříček, kružnice opsaná a vepsaná) v úlohách početní geometrie;
- užít s porozuměním poznatky o pravidelných mnohoúhelnících v úlohách početní geometrie.

6.4 Kružnice a kruh
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní pojmy týkající se kružnice a kruhu (tětiva, kružnicový oblouk, kruhová výseč a úseč, mezikruží), popsat a využít jejich vlastnosti;
- užít s porozuměním polohové vztahy mezi body, přímkami a kružnicemi;
- aplikovat metrické poznatky o kružnicích a kruzích (obvod, obsah) v úlohách početní geometrie.

6.5 Geometrická zobrazení
- popsat a určit shodná zobrazení (souměrnost, posunutí, otočení) a využít jejich vlastnosti.

(Zdroj: http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1; upraveno)

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Planimetrie najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:
- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 24–28)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 24–28)
- Matematika pro střední školy – 3. díl: Planimetrie

Úloha 01 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

	ANO	NE
1. V každém rovnoběžníku se úhlopříčky půlí a jsou k sobě kolmé.	☐	☐
2. Průnikem polopřímky *AB* a polopřímky opačné k polopřímce *BA* je bod *B*.	☐	☐
3. Je-li alespoň jeden z vnitřních úhlů mnohoúhelníku větší než úhel přímý, je daný mnohoúhelník nekonvexní.	☐	☐
4. Součet velikostí vnitřních úhlů v každém konvexním pětiúhelníku je větší než 600°.	☐	☐

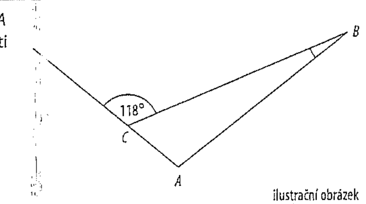
Úloha 02 Trojúhelník *ABC* má strany o délkách 11 cm a 19 cm. Jakých hodnot může nabývat délka třetí strany trojúhelníku?

A) $(11; 19)$ cm B) $(8; \infty)$ cm C) $(8; 30)$ cm D) $(0; 30)$ cm E) libovolných hodnot

Úloha 03 V plánku s měřítkem 1 : 1 000 je zakreslen pozemek ve tvaru tupoúhlého trojúhelníku, jehož plošný obsah je 5 cm^2. Určete, jaký je plošný obsah pozemku ve skutečnosti. **Výsledek uveďte v m^2.**

Úloha 04 Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku je 900°. Určete, kolik má tento mnohoúhelník úhlopříček.

Úloha 05 V tupoúhlém trojúhelníku *ABC* s tupým úhlem u vrcholu *A* je velikost vnějšího úhlu při vrcholu *C* rovna 118°. Velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku *ABC* jsou vyjádřeny v celých stupních. Jaká je největší možná velikost vnitřního úhlu u vrcholu *B*?



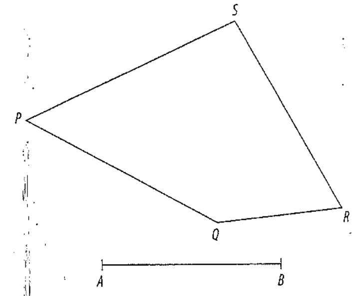
ilustrační obrázek

A) 1°
B) 27°
C) 28°
D) 59°
E) 62°

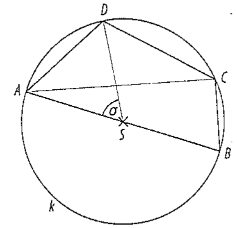
Úloha 06 V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C* označíme *S* střed kružnice opsané trojúhelníku, *T* těžiště trojúhelníku a *V* ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku. Které z následujících tvrzení popisuje správně vzájemnou polohu bodů *S*, *T*, *V*?

A) Body *S*, *T*, *V* jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
B) Body *S*, *T*, *V* jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.
C) Body *S*, *T* splývají.
D) Body *T*, *V* splývají.
E) Body *S*, *T*, *V* leží na jedné přímce.

Úloha 07 Čtyřúhelník *PQRS* na obrázku zobrazuje hranici rekreačního bazénu. Úsečka *AB* představuje chodník před šatnami. Plavčík hledá na hranici bazénu místo, ze kterého bude možné sledovat chodník v zorném úhlu 45°. Určete, kolik takových míst existuje, a vyznačte je v obrázku.

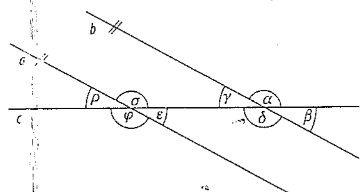


Úloha 08 Pro čtyřúhelník *ABCD* platí, že jeho vrcholy leží na kružnici *k* se středem *S*, bod *S* je zároveň středem strany *AB* a úhel $ASD = \sigma$ má velikost 62°. Jaká je velikost úhlu *BCD*?



A) 120°
B) 121°
C) 122°
D) 123°
E) 124°

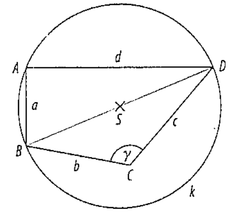
Úloha 09 Na obrázku jsou zakresleny rovnoběžky *a*, *b* proťaté přímkou *c*. Přiřaďte ke každé dvojici úhlů (1.–4.) odpovídající pojmenování dvojice úhlů (A)–F)).



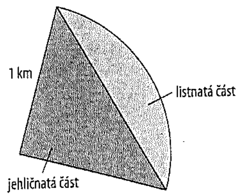
1. $\alpha; \delta$
2. $\beta; \varepsilon$
3. $\alpha; \varphi$
4. $\gamma; \delta$

A) vedlejší úhly
B) protější úhly
C) souhlasné úhly
D) nesouhlasné úhly
E) vrcholové úhly
F) střídavé úhly

Úloha 10 V čtyřúhelníku *ABCD*, jehož vrcholy *A*, *B*, *D* leží na kružnici *k* se středem *S* a jehož úhlopříčka *BD* je průměrem kružnice *k*, má strana *AB* délku $a = 5$ cm, strana *BC* délku $b = 7$ cm, strana *CD* délku $c = 3$ cm a úhel $BCD = \gamma$ má velikost 120°. Vypočítejte délku *d* strany *AD*.

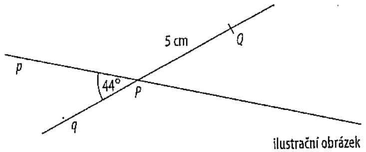


Úloha 11 Lesík ve tvaru čtvrtkruhu o poloměru 1 km je rozdělen na část listnatou, jejíž plocha má tvar kruhové úseče, a část jehličnatou s hranicí ve tvaru trojúhelníku. Které z následujících tvrzení o plochách jednotlivých částí lesíku je pravdivé?



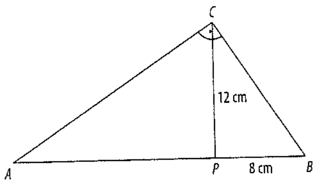
A) Obsah plochy listnaté části je stejný jako obsah plochy jehličnaté části.
B) Obsah plochy listnaté části je roven jedné třetině obsahu celého lesíku.
C) Obsah plochy listnaté části je menší než jedna třetina obsahu celého lesíku.
D) Obsah plochy listnaté části je větší než polovina obsahu jehličnaté části.
E) Obsah plochy listnaté části je $0{,}25 \cdot (\pi - 1)$ km^2.

Úloha 12 Bod P je průsečíkem různoběžek p, q, jejichž odchylka je 44°. Bod Q leží na přímce q ve vzdálenosti 5 cm od bodu P. Vypočítejte **s přesností na mm** vzdálenost bodu Q od přímky p.



ilustrační obrázek

Úloha 13 Pravoúhlý trojúhelník ABC má výšku na stranu c o délce $|PC| = 12$ cm a úsek na přeponě o délce $|PB| = 8$ cm. Určete obsah trojúhelníku ABC.

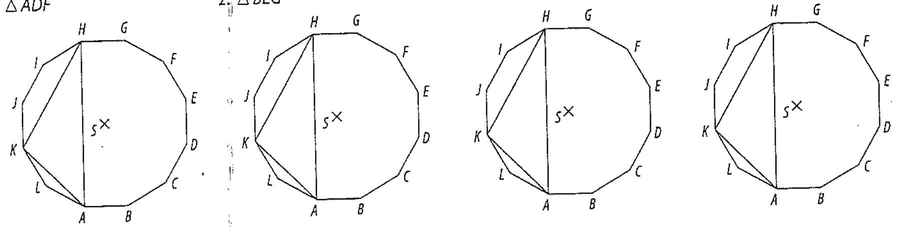


Úloha 14 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Délka střední příčky v každém lichoběžníku je aritmetickým průměrem délek jeho základen.	ANO ☐	NE ☐
2. Střední příčka rozdělí trojúhelník na rovnoběžník a trojúhelník s původním trojúhelníkem podobný.	ANO ☐	NE ☐
3. Střední příčka trojúhelníku prochází jeho těžištěm.	ANO ☐	NE ☐
4. Existuje trojúhelník, jehož střední příčky mají délky 2 cm, 3 cm a 5 cm.	ANO ☐	NE ☐

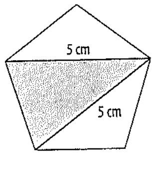
Úloha 15 Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ se středem S. Přiřaďte k zadanému trojúhelníku (1.–4.) odpovídající shodné zobrazení (A)–F)), ve kterém je tento trojúhelník obrazem trojúhelníku AHK.

1. $\triangle ADF$ 2. $\triangle BEG$ 3. $\triangle CEH$ 4. $\triangle BDG$

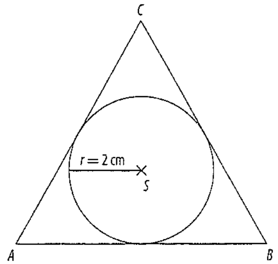


A) středová souměrnost daná středem souměrnosti S
B) osová souměrnost, kde osou souměrnosti je přímka AG
C) osová souměrnost, kde osou souměrnosti je přímka BH
D) osová souměrnost, kde osou souměrnosti je osa úsečky AB
E) otočení se středem S o 150° v kladném smyslu
F) otočení se středem H o 30° v kladném smyslu

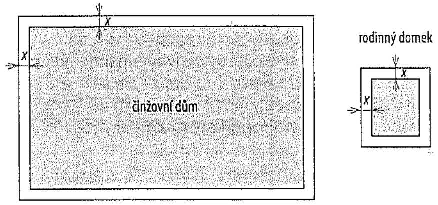
Úloha 16 Záhon ve tvaru pravidelného pětiúhelníku má úhlopříčky dlouhé 5 m a je rozdělen dvěma z nich na tři trojúhelníky (viz obrázek). Trojúhelník, který je na obrázku vybarven šedě, bude osázen květinami, na zbytku záhonu bude trávník. Zahradník počítá s jednou sazenicí květiny na 1 dm^2. Určete, kolik balení sazenic má zahradník zakoupit, jestliže jedno balení obsahuje 50 sazenic.



Úloha 17 Rovnostrannému trojúhelníku ABC je vepsána kružnice s poloměrem $r = 2$ cm. Určete vzdálenost těžiště tohoto trojúhelníku od jeho střední příčky. **Výsledek uveďte v mm.**

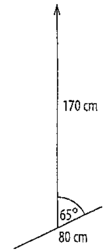


Úloha 18 Ve městě stojí vedle sebe rodinný domek a činžovní dům. Půdorysem obou domů jsou obdélníky. Rodinný dům zabírá 16x menší plochu než činžovní dům. Kolem obou domů vede stejně široký chodník. Pozemek rodinného domku včetně chodníku má o 12 m delší obvod, než je obvod samotného domku.
O kolik metrů je delší obvod pozemku činžovního domu včetně chodníku než obvod samotného činžovního domu?



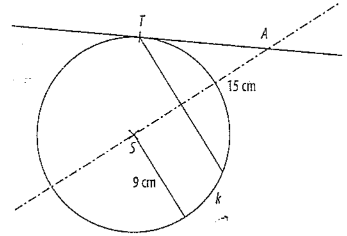
A) o 12 m B) o 36 m C) o 48 m
D) o 180 m E) nelze jednoznačně určit

Úloha 19 Posunutí sněžné shrnovací radlice je dané vyznačenou orientovanou úsečkou, jejíž velikost je rovna 170 cm. Radlice má délku 80 cm a se směrem posunutí svírá úhel 65°. Jakou plochu shrne radlice při daném posunutí?

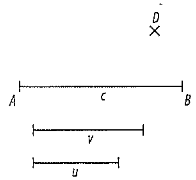


A) méně než 1 m^2
B) $\langle 1; 1{,}1)$ m^2
C) $\langle 1{,}1; 1{,}2)$ m^2
D) $\langle 1{,}2; 1{,}3)$ m^2
E) více než 1,3 m^2

Úloha 20 Ke kružnici k (S; 9 cm) je vedena bodem A, který na ní neleží, tečna, která má s kružnicí k společný bod dotyku T. Vzdálenost bodu A od středu S je $|AS| = 15$ cm. Určete délku tětivy procházející bodem T, jejíž osou je přímka AS.



Úloha 21 V rovině jsou dány body A, B, D a úsečky s délkami u, v. Úsečka AB je stranou c trojúhelníku ABC. Sestrojte v polorovině ABD všechny vrcholy C trojúhelníku ABC, jehož výška na stranu c má délku u a délka strany b je rovna v.



Úloha 08

E)

Využijeme vlastnost po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti

$a_{n+1} = a_n \cdot q$. Odtud plyne $a_{99} = \frac{a_{100}}{q}$ a $a_{101} = a_{100} \cdot q$. Dosazením do vyjádření $a_{99} \cdot a_{100} \cdot a_{101} = 1\,000\,000$ určíme člen $a_{100} = 100$. Pomocí známého kvocientu q stanovíme následně člen a_{99}. Pro hledaný rozdíl platí $a_{100} - a_{99} = 600$.

Úloha 09

D)

Při násobení mocnin se stejným základem se exponenty sčítají, proto zadaný výraz upravíme na tvar $9^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^8}}$. Exponent tvoří součet n členů geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{3^8}$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 9$.

Použijeme vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Úloha 10

Využijeme vlastností geometrické posloupnosti. Ze zádání plyne $q = \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{3}{2}$.

Dále platí: $r_1 = \frac{r_8}{q^7} = \frac{5 \cdot 2^7}{3^7}$ cm $= \frac{640}{2\,187}$ cm, $r_6 = \frac{r_8}{q^2} = \frac{5 \cdot 2^2}{3^2}$ cm $= \frac{20}{9}$ cm

1. E)

Pro hledaný obsah platí: $S_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{640}{2\,187}\right)^2$ cm^2

2. C)

Pro hledanou délku platí: $o_6 = 2\pi r_6 = 2\pi \cdot \frac{20}{9}$ cm

3. B)

Obvody kružnic tvoří rovněž geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{3}{2}$.

Dále platí $a_1 = o_1 = 2\pi r_1$, $n = 8$. Využijeme vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Úloha 11

1. B)

Aritmetická posloupnost, kde $a_1 = 4$, $d = -2$. Pro n-tý člen platí

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, tj. $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-2) = 6 - 2n$.

2. C)

Aritmetická posloupnost, kde $a_1 = -\frac{1}{3}$, $d = 1$. Pro n-tý člen platí

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, tj. $a_n = -\frac{1}{3} + (n-1) \cdot 1 = -\frac{4}{3} + n = \frac{3n-4}{3}$.

3. A)

Geometrická posloupnost, kde $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$. Pro n-tý člen platí

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, tj. $a_n = -\frac{1}{3} \cdot (-2)^{n-1} = -\frac{(-2)^{n-1} \cdot (-2)}{3 \cdot (-2)} = \frac{(-2)^n}{6}$.

4. E)

Geometrická posloupnost, kde $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = 2$. Pro n-tý člen platí

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, tj. $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} = -\frac{2^{n-1} \cdot 2}{3 \cdot 2} = -\frac{2^n}{6}$.

Úlohu 11 lze řešit i postupným dosazením hodnot 1, 2, 3, 4, 5 do předpisů A)–F) pro n-tý člen. Tím určíme jednotlivé členy posloupností a porovnáme je s posloupnostmi 1.–4.

Úloha 12

B)

Postupně vyloučíme neplatná tvrzení. Ověříme, zda je posloupnost aritmetická, tj. $a_{n+1} - a_n =$ konst., nebo geometrická, tj. $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$ konst.

Platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1} \cdot 2^{2-(n+1)}}{5^n \cdot 2^{2-n}} = \frac{5}{2}$

Úloha 13

a) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $d = \sqrt{2}$

Platí: $b_3 - b_2 = b_2 - b_1 = \sqrt{2}$

b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, příp. $q = \sqrt{2} + 1$

Platí: $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$

c) 2

Platí: $a_4 = a_3 \cdot q = (\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}+1) = 3 + 2\sqrt{2}$,

$b_4 = b_3 + d = (\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$

Úloha 14

$a_1 = 5$

Počty přečtených stran tvoří členy aritmetické posloupnosti, přičemž $d = 3$, $n = 14$, $s_{14} = 343$. Využijeme vzorec pro součet n členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ a vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Odtud $s_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$. Dosadíme známé hodnoty a pomocí ekvivalentních úprav vyjádříme člen a_1.

Úloha 15

Strany trojúhelníkového pozemku mají délky a; $b = 1{,}5a$; $c = 1{,}5b = 2{,}25a$.
Ze známého obvodu pozemku určíme délky stran $a = 12$ m, $b = 18$ m, $c = 27$ m.

1. ANO

Hnědý plot je o 15 m delší než zelený $(27 - 12 = 15)$.

2. NE

Hnědý plot je nejdelší, má délku 27 m.

3. ANO

Zelený plot je nejkratší, má délku 12 m.

4. ANO

Část plotu, která má délku 18 m, není hnědá ani zelená.

Úloha 16

C)

Stejný procentuální nárůst při zvyšování produkce vypovídá o tom, že počty vyrobených kusů v jednotlivých letech tvoří členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q > 1$. Výchozí množství výroby ventilů označíme a_0, množství výroby po 3 letech označíme a_3. Z hodnoty kvocientu q stanovíme meziroční procentuální přírustek. Platí $a_3 = a_0 \cdot q^3 = 1{,}1 \cdot a_0$, odtud $q \doteq 1{,}032$.

Úloha 17

C)

Cena zařízení činí každý rok 70 % ceny tohoto zařízení v roce předešlém, tj. ceny v jednotlivých letech tvoří členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 0{,}7$. Označíme-li výchozí cenu jako a_0, hledáme 5. člen této geometrické posloupnosti. Platí $a_5 = a_0 \cdot q^5 = 500\,000 \cdot 0{,}7^5 = 84\,035$ Kč.

Úloha 18

a) 10 519 Kč

Do vzorce pro složené úrokování $J_n = J_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ dosadíme zadané hodnoty, tj. vloženou částku $J_0 = 10\,000$ Kč, výši úrokové sazby $p = 1{,}7$ a počet let $n = 3$.

b) 42 let

Do vzorce pro složené úrokování $J_n = J_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ dosadíme zadané hodnoty, tj. vloženou částku $J_0 = 10\,000$ Kč, výslednou částku $J_n = 20\,000$ Kč, výši úrokové sazby $p = 1{,}7$. Pomocí logaritmování rovnice vyjádříme n. Výslednou hodnotu $n \doteq 41{,}1$ let zaokrouhlíme na celé číslo nahoru (úrok je připsán až na konci roku).

Úloha 19

645 Kč

Složeným úrokováním se vložená částka za 5 let zvýšila na hodnotu $[1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}008)^5]$ Kč, jednoduchým úrokováním se stejná částka za 5 let zvýšila na hodnotu $[1\,000\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}008)]$ Kč.

Úloha 20

a) 53 000 Kč.

Vložená částka bude po dobu 5 let úročena složeným úrokováním. Používáme vzorec $J_n = J_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, kam dosadíme zadané hodnoty, tj. vloženou částku $J_0 = 50\,000$ Kč, počet let $n = 5$ a výši úrokové sazby $p = 1{,}5$. Výslednou částku zaokrouhlíme dolů na celé tisíce.

b) 4 546 Kč

Rozdíl mezi vloženou a výslednou částkou po 5 letech činí 3 864,2 Kč. Tato suma je zdaněna 15% sazbou, tj. odpovídá 85 % hledané částky, kterou na úrocích zaplatí banka.

Úloha 21

$p \doteq 5{,}37$ %

Uvažujeme-li zdanění úroků, používáme vzorec $J_n = J_0 \cdot \left(1 + k \cdot \frac{p}{100}\right)^n$, kde k je tzv. zdaňovací koeficient. Jeho hodnotu určíme podle vzorce $k = \frac{100 - d}{100}$, kde d je výše daně v %. Při 15% danění úroků, $d = 15$, má koeficient k hodnotu 0,85. Dosadíme zadané hodnoty, tj. konečnou částku po n letech J_n, která je o čtvrtinu vyšší než původní částka, tj. $J_n = 1{,}25 \cdot J_0$, počet let $n = 5$ a hodnotu zdaňovacího koeficientu $k = 0{,}85$. Pomocí ekvivalentních úprav vyjádříme výši úrokovací sazby p.

Úloha 22

D)

Určujeme-li výši splátky s při umoření dluhu D, který je úročen p procenty a má být splacen za n let, používáme vzorec $s = D \cdot \left(r^n \cdot \frac{r-1}{r^n - 1}\right)$, kde r je tzv. úročitel.

Jeho hodnotu určíme pomocí vzorce $r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, kde p je výše úrokové sazby v procentech. Pro $p = 6$ je $r = 1{,}06$. Dosadíme zadané hodnoty, tj. výši půjčky (dluhu) $D = 250\,000$, počet let splácení $n = 5$ a hodnotu úročitele $r = 1{,}06$ do vzorce pro výši splátky.

6. Planimetrie

Úloha 01

1. NE

Úhlopříčky jsou k sobě kolmé, pouze pokud jsou strany rovnoběžníku stejně dlouhé, tzn. u čtverce a kosočtverce.

2. NE

Hledaným průnikem je polopřímka opačná k polopřímce BA.

3. ANO

Přímý úhel je úhel o velikosti 180°.

4. NE

Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$. V případě konvexního pětiúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů 540°.

Úloha 02

C)

V souladu s trojúhelníkovou nerovností musí být třetí strana trojúhelníku delší než rozdíl délek zbylých dvou stran, tzn. $(19 - 11)$ cm $= 8$ cm, a současně kratší než součet délek zbylých dvou stran, tzn. $(19 + 11)$ cm $= 30$ cm.

Úloha 03

500 m^2, případně $S = 500$ m^2

Skutečný trojúhelník a trojúhelník v plánku jsou trojúhelníky podobné. Poměr podobnosti je 1 000. Poměr jejich obsahů je proto roven 1 000^2. Pozemek má ve skutečnosti plochu 5 000 000 cm^2.

Úloha 04

14

Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$. Řešením rovnice $(n-2) \cdot 180° = 900°$ zjistíme, že $n = 7$, jedná se tedy o sedmiúhelník.

Počet úhlopříček konvexního n-úhelníku je $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Úloha 05

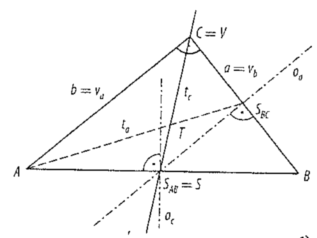
B)

Ze zadání plyne, že úhel α je tupý, tzn. pro jeho číselnou velikost platí $\alpha \geq 91°$.
Dále platí, že $\alpha + \beta = 118°$ (vlastnost vnějšího úhlu trojúhelníku). Odtud
$\beta \leq 118° - 91°$, tzn. $\beta \leq 27°$.

Úloha 06

E)

V případě pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C platí: $V = C$, $S = S_{AB}$. Všechny body leží na přímce, na níž leží těžnice t_c trojúhelníku ABC (viz obrázek).



Pozn.: Přímka, na které body S, T, V leží, se nazývá Eulerova přímka.
Tvrzení je pravdivé i pro obecný trojúhelník.

Úloha 22

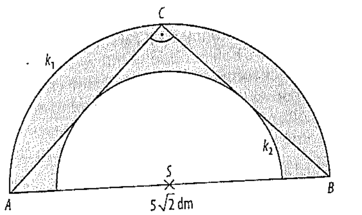
Narýsujte podle uvedeného postupu konstrukce čtyřúhelník *ABCD*. Který z následujících názvů odpovídá narýsovanému čtyřúhelníku?

Postup:
1. $AB;\ |AB| = 6$ cm
2. $k_1;\ k_1(B;\ 3\text{ cm})$
3. $E;\ E \in k_1 \cap \mapsto BA$
4. $k_2;\ k_2(E;\ 5\text{ cm})$
5. $k_3;\ k_3(A;\ 4\text{ cm})$
6. $D;\ D = k_2 \cap k_3$
7. $\triangle AED$
8. $m;\ D \in m \parallel AB$
9. $n;\ B \in n \parallel ED$
10. $C;\ C \in m \cap n$
11. čtyřúhelník *ABCD*

A) kosočtverec
B) kosodélník
C) deltoid
D) pravoúhlý lichoběžník
E) obecný čtyřúhelník

Úloha 23

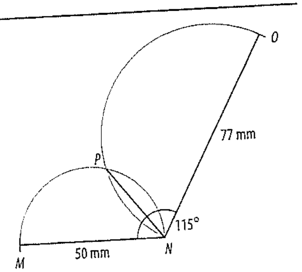
Na obrázku je šedě vybarvená oblast, kterou tvoří polovina mezikruží ohraničeného kružnicemi k_1 a k_2. Kružnice k_1 je kružnice opsaná pravoúhlému rovnoramennému trojúhelníku *ABC*, jehož základna *AB* má délku $5\sqrt{2}$ dm. Kružnice k_2 je s kružnicí k_1 soustředná a dotýká se ramen trojúhelníku *ABC*. Jaký je obvod šedě vybarvené oblasti **zaokrouhlený na celé cm?**



A) 175 cm
B) 190 cm
C) 210 cm
D) 245 cm
E) jiná hodnota

Úloha 24

Úsečka *MN*, kde $|MN| = 50$ mm, svírá s úsečkou *NO*, kde $|NO| = 77$ mm, úhel o velikosti 115°. Nad oběma úsečkami jsou sestrojeny půlkružnice, které se protínají v bodě *P*. Určete velikost úsečky *NP*. Výsledek **zaokrouhlete na celé mm.**



7. Stereometrie

Klíč na s. 98–101

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Stereometrie, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

7.1 Tělesa
- charakterizovat jednotlivá tělesa (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan, komolý kužel, koule a její části), vypočítat jejich objem a povrch;
- užít jednotky délky, obsahu a objemu, provádět převody jednotek;
- užít polohové a metrické vlastnosti v hranolu;
- využít poznatky o tělesech v úlohách.

(*Zdroj: http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1; upraveno*)

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Stereometrie najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:
- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 29–31)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 29–31)
- Matematika pro střední školy – 6. díl: Stereometrie

Úloha 01

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Každá krychle je pravidelný čtyřboký hranol.	ANO	NE
2. Každý kolmý nepravidelný čtyřboký hranol je kvádr.	ANO	NE
3. Povrch kulové úseče tvoří vrchlík.	ANO	NE
4. Podstavou jehlanu je kruh.	ANO	NE

Úloha 02

Přiřaďte ke každému tělesu, jehož vlastnosti jsou formulovány slovně (1.–4.), odpovídající název tělesa (A)–F)).

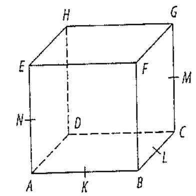
1. Síť tělesa tvoří čtyři rovnoramenné trojúhelníky.
2. Plášť tělesa tvoří dvě dvojice shodných obdélníků, podstavami jsou shodné čtyřúhelníky.
3. Plášť tělesa tvoří dvě dvojice shodných rovnoramenných lichoběžníků, podstavami jsou obdélníky.
4. Podstavou tělesa je kruh, libovolným osovým řezem je rovnoramenný trojúhelník.

A) hranol
B) jehlan
C) kužel
D) komolý kužel
E) komolý jehlan
F) válec

Úloha 03

Je dána krychle *ABCDEFGH*; středy hran *AB*, *BC*, *CG*, *AE* jsou označeny po řadě *K*, *L*, *M*, *N*. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.–4.), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

1. Přímky *ED* a *HC* jsou rovnoběžné.	ANO	NE
2. Přímky *NK* a *LM* jsou mimoběžné.	ANO	NE
3. Bod *K* leží v rovině *LMN*.	ANO	NE
4. Roviny *KLM* a *BGE* jsou rovnoběžné.	ANO	NE



Úloha 04

Přiřaďte ke každé vlastnosti tělesa (1.–4.) odpovídající objem krychle (A)–F)).

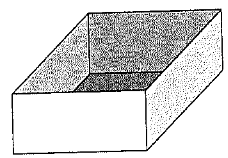
1. Délka hrany krychle je 0,01 km.
2. Plošný obsah podstavy krychle je 0,01 m^2.
3. Povrch krychle je 600 mm^2.
4. Objem krychle je 60 hl.

A) 1 l
B) 6 m^3
C) 6 cm^3
D) 1 000 hl
E) 1 ml
F) 1 000 m^3

Úloha 05

Tři vnitřní stěny nádrže tvaru kvádru mají obsahy 36 m^2, 100 m^2 a 64 m^2. Kolik hl vody je zapotřebí, aby byla nádrž zcela zaplněna?

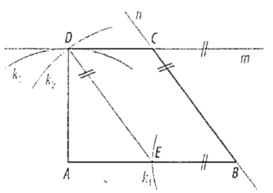
Výsledek nezaokrouhlujte.



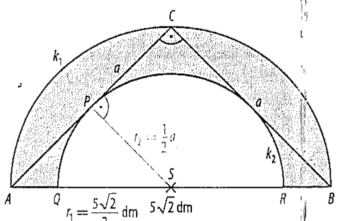
A) méně než 478,8 hl
B) 478,8 hl
C) 4 800 hl
D) více než 4 800 hl
E) Nádrž odpovídající zadaným podmínkám neexistuje.

Testové úlohy k tematickým celkům

Úloha 22
D)
Úloha je nepolohová, řešením je pravoúhlý lichoběžník (viz obrázek).



Úloha 23
C)

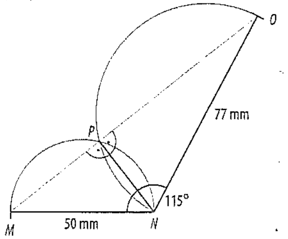


Kružnice k_1 se středem S a poloměrem r_1 je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Poloměr r_1 je roven polovině délky základny AB. Kružnice k_2 se středem S a poloměrem r_2 je kružnice vepsaná pravoúhlému rovnoramennému trojúhelníku ABC. Poloměr r_2 je roven polovině délky ramene BC (střední příčka trojúhelníku ABC). Délku ramene a určíme pomocí Pythagorovy věty, platí $a = 5$. Obvod o šedě vybarvené oblasti tvoří součet poloviny obvodu kružnice k_1, poloviny obvodu kružnice k_2 a délky úseček AQ a RB, kde $|AQ| = |RB| = r_1 - r_2$ je tzv. šířka mezikruží.

$$o = \frac{2\pi r_1}{2} + \frac{2\pi r_2}{2} + 2\cdot(r_1 - r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 + 2\cdot(r_1 - r_2)$$

$$o = \left[\pi\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} + \pi\cdot\frac{5}{2} + 2\cdot\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{2}\right)\right] \text{dm} = \ldots$$

Úloha 24
$|NP| = 32$ mm



Podle Thaletovy věty jsou úhly MPN a NPO pravé. Bod P leží na přímce MO, úsečka NP, jejíž velikost hledáme, je výškou trojúhelníku MNO spuštěnou z bodu N na stranu MO. Nejprve určíme délku strany MO pomocí kosinové věty, platí $|MO| \doteq 108$ mm. Obsah obecného trojúhelníku MNO vyjádříme dvěma způsoby a z rovnosti obou vyjádření vypočítáme výšku NP. Platí:

$S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot|NO|\cdot\sin|\sphericalangle MNO|$ (obsah trojúhelníku určeného sus)

$S_{\triangle MNO} = \frac{|MO|\cdot|NP|}{2}$ (obsah trojúhelníku pomocí základny a výšky na základnu)

Odtud $|NP| = \frac{|MN|\cdot|NO|\cdot\sin 115°}{|MO|}$.

7. Stereometrie

Úloha 01
1. ANO
Krychle je pravidelný čtyřboký hranol, jehož výška se rovná délce hrany.

2. NE
Kvádr je rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny (tzn. i podstavy) jsou obdélníky. Podstavou nepravidelného čtyřbokého hranolu může být libovolný čtyřúhelník.

3. NE
Povrch kulové úseče tvoří kruh (podstava) a vrchlík (plášť).

4. NE
Podstavou jehlanu je mnohoúhelník.

Úloha 02
1. B)
Podstavou tělesa je trojúhelník a plášť tvoří zbylé tři trojúhelníky. Jedná se o kolmý trojboký jehlan.

2. A)
Podstavami jsou shodné čtyřúhelníky, plášť tvoří obdélníky, jedná se o kolmý čtyřboký hranol.

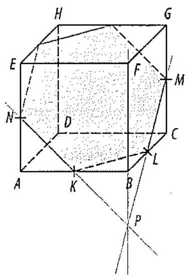
3. E)
Vzhledem k tomu, že podstavami jsou obdélníky, vznikl komolý jehlan ze čtyřbokého jehlanu.

4. C)
Mezi nabízenými tělesy jsou tři, která mají kruhovou podstavu. Protože je osovým řezem tělesa rovnoramenný trojúhelník, vylučuje to možnost válce a komolého kuželu.

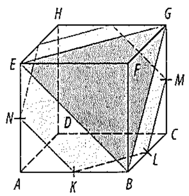
Úloha 03
1. NE
Přímky ED a HC jsou mimoběžné.

2. NE
Přímky NK a LM jsou různoběžné.

3. ANO
Z vyznačeného řezu tělesa rovinou LMN (viz obrázek) je zřejmé, že bod K leží na přímce NP, která je průsečnicí přední stěny krychle s rovinou LMN, tzn. leží v rovině LMN.



4. ANO
Plyne z kritéria rovnoběžnosti dvou rovin, což potvrzuje obrázek. Např. každé dvě průsečnice zadaných rovin se stejnou stěnou krychle jsou rovnoběžné (strana v trojúhelníku a jeho střední příčka).



Úloha 04
1. F)
Hrana krychle má délku $a = 0{,}01$ km $= 10$ m. Pro objem krychle platí:
$V = a^3 = 10^3\ \text{m}^3 = 1000\ \text{m}^3$

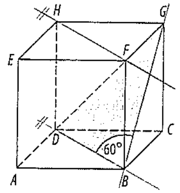
2. A)
Ze zadané velikosti plošného obsahu podstavy krychle $S = a^2 = 0{,}01\ \text{m}^2$ určíme délku hrany krychle $a = \sqrt{0{,}01}$ m $= 0{,}1$ m. Pro objem krychle platí:
$V = a^3 = 0{,}1^3\ \text{m}^3 = 0{,}001\ \text{m}^3 = 1\ \text{dm}^3 = 1$ l

3. E)
Ze zadané velikosti povrchu krychle $S = 6a^2 = 600\ \text{mm}^2$ určíme délku hrany krychle $a = \sqrt{\frac{600}{6}}$ mm $= 10$ mm $= 1$ cm. Pro objem krychle platí:
$V = a^3 = 1^3\ \text{cm}^3 = 1\ \text{cm}^3 = 1$ ml

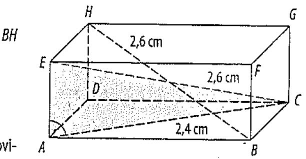
4. B)
Zadanou hodnotu objemu vyjádříme v jiných jednotkách a porovnáme s nabízenými hodnotami A)–F). Platí $V = 60$ hl $= 6\,000$ l $= 6\,000\ \text{dm}^3 = 6\ \text{m}^3$.

Úloha 05
C)
Označíme-li délky stran kvádru a, b, c, pak pro součin zadaných plošných obsahů platí $S_1\cdot S_2\cdot S_3 = (ab)\cdot(bc)\cdot(ac) = a^2\cdot b^2\cdot c^2 = (abc)^2 = V^2$. Odtud pro hledaný objem V vyplývá vztah $V = \sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$. Dosadíme zadané hodnoty, provedeme výpočet objemu a převod výsledné hodnoty na hl.
$V = \sqrt{36\cdot 100\cdot 64}\ \text{m}^3 = 480\ \text{m}^3 = 480\,000\ \text{dm}^3 = 480\,000\ \text{l} = 4\,800$ hl

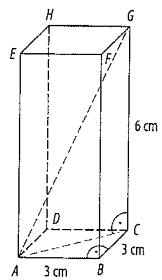
Úloha 06
B)
Zadané přímky jsou mimoběžné. Odchylka mimoběžných přímek je rovna odchylce různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru a rovnoběžných s danými mimoběžkami. Přímka FH je rovnoběžná s přímkou BD, trojúhelník BDG je rovnostranný, odchylka přímek BD a BG (i odchylka přímek FH a BG) je rovna 60°.



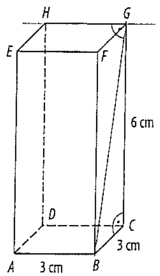
Úloha 07
1 cm
Délky tělesových úhlopříček BH a EC jsou stejné, tzn. $|BH| = |EC| = 2{,}6$ cm. Trojúhelník ACE je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A (přímka AE je kolmá k rovině ABC, a tedy ke všem přímkám této roviny). K výpočtu délky strany AE využijeme Pythagorovu větu.



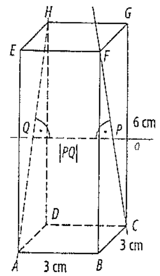
Úloha 08
1. E)
Vzdálenost bodů A a G je rovna délce tělesové úhlopříčky hranolu. Nejprve pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABC vypočítáme délku stěnové úhlopříčky podstavy hranolu (čtverce), tj. $|AC| = 3\sqrt{2}$ cm. Následně opět pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ACG vypočítáme délku tělesové úhlopříčky hranolu.



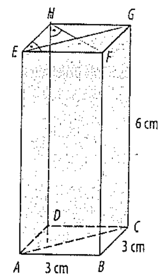
2. D)
Vzdálenost bodu B od přímky HG je rovna délce stěnové úhlopříčky stěny $BCGF$. K výpočtu použijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník BCG.



3. A)
Vzdálenost mimoběžných přímek CF a AH je rovna vzdálenosti průsečíků P, Q s jejich osou o. Osa mimoběžek o je přímka, která je s oběma zadanými přímkami různoběžná a k oběma kolmá.
Platí $|PQ| = |AB|$.

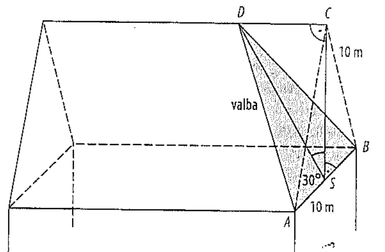


4. F)
Vzdálenost přímky DH od roviny ACG, se kterou je rovnoběžná, je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky DH (například bodu H) od roviny ACG. Vzdálenost bodu H od roviny ACG je rovna polovině délky stěnové úhlopříčky FH, kterou lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník FHE.



Úloha 09
50 m^2
Štít střechy má tvar rovnostranného trojúhelníku (jedná se o podstavu pravidelného trojbokého hranolu). Pravý štít označíme ABC, jeho výšku CS stanovíme pomocí Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník BCS. Platí $|CS| = 5\sqrt{3}$ m. Valbu tvoří rovnoramenný trojúhelník ABD, jeho výšku DS stanovíme pomocí goniometrické funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku SCD.

Platí $\cos 30° = \frac{|CS|}{|DS|}$. Odtud $|DS| = \frac{2\cdot|CS|}{\sqrt{3}} = \frac{10\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$ m. Plošný obsah valby stanovíme pomocí známé délky základny AB a výšky DS trojúhelníku ABD.



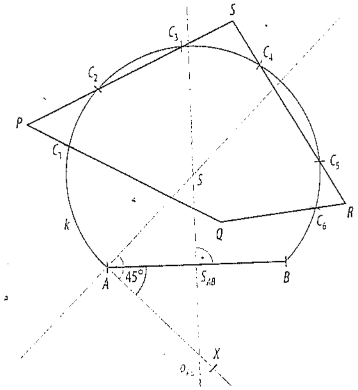
Úloha 10
a) kolmý pravidelný čtyřboký jehlan
Podstavou tělesa je čtverec, plášť tvoří čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky.

b) 75 cm^2, případně $S = 75$ cm^2
Povrch tělesa je roven plošnému obsahu mnohoúhelníku $ABCDEFGH$, tzn. povrchu kolmého pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavu S_p tvoří čtverec $ABEF$ o obsahu 25 cm^2 a plášť Q je tvořen čtyřmi shodnými trojúhelníky, přičemž obsah každého trojúhelníku je roven polovině obsahu čtverce $ABEF$.

$S = S_p + Q = \left(25 + 4\cdot\frac{25}{2}\right)$ cm^2

Úloha 07
6, viz obrázek

Množinou všech bodů, z nichž je vidět daná úsečka pod úhlem 45°, je kružnicový oblouk AB, jehož střed S je průsečíkem osy o_{AB} úsečky AB a přímky kolmé k ramenu XA úsekového úhlu XAB o velikosti 45°.

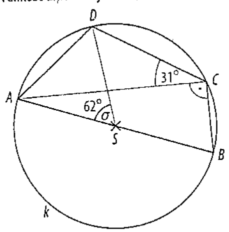


Úloha 08
B)

Hledanou velikost úhlu BCD určíme jako součet velikostí úhlů ACD a BCA, tzn. $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCA|$. Úhel ASD je středovým úhlem příslušejícím k oblouku AD, k němuž je úhel ACD obvodovým. Pro velikosti uvedených úhlů platí:

$|\sphericalangle ACD| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASD| = \frac{1}{2} \cdot 62° = 31°$

Velikost úhlu BCA je 90° (Thaletova věta).



Úloha 09
Plyne z definic vrcholových, souhlasných, střídavých a vedlejších úhlů.

1. E)
2. C)
3. F)
4. A)

Úloha 10
$|AD| = 12$ cm

V obecném trojúhelníku BCD známe délku dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného. Délku strany BD proto určíme pomocí kosinové věty. Platí $|BD| = 13$ cm. Trojúhelník ABD je pravoúhlý (Thaletova věta). Známe délku jeho odvěsny a přepony. Délku druhé odvěsny určíme pomocí Pythagorovy věty.

Úloha 11
D)

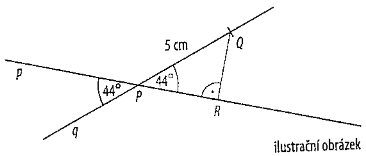
Má-li kruh poloměr $r = 1$ km, pak:

- obsah čtvrtkruhu $S_C = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$ km$^2 = \frac{\pi}{4}$ km^2
- obsah trojúhelníku $S_T = \frac{1}{2} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$ km$^2 = \frac{1}{2}$ km^2
- obsah úseče $S_U = S_C - S_T = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ km$^2 = \frac{\pi - 2}{4}$ km^2

Pro vypočítané hodnoty postupně ověříme platnost jednotlivých tvrzení.

Úloha 12
35 mm, případně $|pQ| \doteq 35$ mm

Platí $|pQ| = |RQ|$, kde bod R je patou kolmice spuštěné z bodu Q k přímce p.
V pravoúhlém trojúhelníku PQR platí: $|RQ| = |PQ| \cdot \sin 44° \doteq 35$ mm



ilustrační obrázek

Úloha 13
156 cm^2, případně $S = 156$ cm^2

Délku úseku AP na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku určíme pomocí Euklidovy věty o výšce, tzn. $|PC|^2 = |AP| \cdot |PB|$. Odtud určíme $|AP| = 18$ cm a dopočítáme $|AB| = (18 + 8)$ cm $= 26$ cm. Pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku použijeme vzorec $S = \frac{|AB| \cdot |CP|}{2}$ cm^2.

Úloha 14
1. ANO

V lichoběžníku se základnami a, c pro délku střední příčky s platí $s = \frac{a+c}{2}$.

2. NE

Střední příčka rozdělí trojúhelník na **lichoběžník** a trojúhelník s původním trojúhelníkem podobný.

3. NE

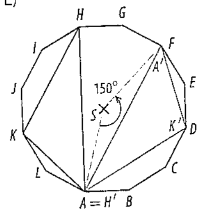
Střední příčka těžnici půlí, zatímco těžiště ji dělí v poměru 1 : 2.

4. NE

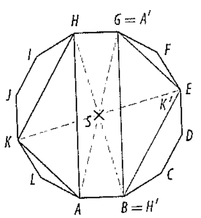
Střední příčky trojúhelníku rozdělí původní trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky, jejichž délky stran se shodují s délkami příček. Pro zadané hodnoty délek příček neplatí trojúhelníková nerovnost.

Úloha 15
Využijeme vlastnosti zadaných shodných zobrazení.

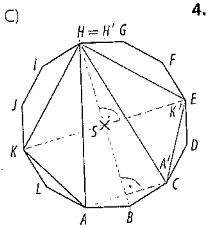
1. E)



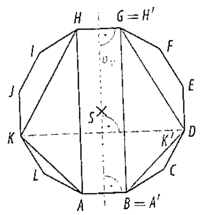
2. A)



3. C)

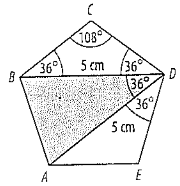


4. D)



Úloha 16
15 balení

Velikost vnitřního úhlu v pravidelném pětiúhelníku je 108°. Velikost úhlu sevřeného úhlopříčkami je 36°.



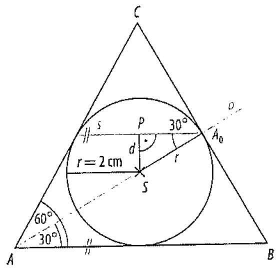
V $\triangle ABD$ známe délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného. Pro výpočet obsahu $\triangle ABD$ použijeme vztah $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot \sin 36°$. Platí $S_\triangle \doteq 735$ dm^2.

Obsah záhonu vydělíme počtem sazenic v 1 balení ($735 : 50 = 14{,}7 \doteq 15$ balení).

Úloha 17
10 mm

Střední příčka s trojúhelníku je rovnoběžná s protější stranou. V rovnostranném trojúhelníku je velikost všech vnitřních úhlů 60°. Střed S kružnice vepsané leží na ose úhlu u vrcholu A, která protíná stranu BC v bodě A_0. Využijeme pravoúhlý trojúhelník SA_0P, v němž platí: $|SA_0| = r = 2$ cm, $|\sphericalangle SA_0P| = 30°$ (vlastnost střídavých úhlů). Hledanou vzdálenost d určíme pomocí goniometrické funkce sinus:

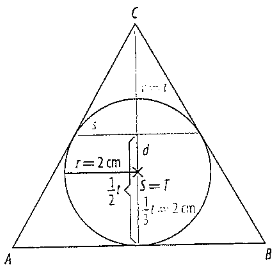
$\sin 30° = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \cdot \sin 30°$



Jiný způsob řešení: V rovnostranném trojúhelníku střed S kružnice vepsané splývá s těžištěm T trojúhelníku. Výška v trojúhelníku je totožná s jeho těžnicí t. Střední příčka s půlí těžnici trojúhelníku, těžiště T ji dělí v poměru 2 : 1 od vrcholu.

Platí $\frac{1}{3}t = r = 2$ cm. Odtud $t = 6$ cm.

Hledaná vzdálenost d odpovídá rozdílu $d = \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t$.



Úloha 18
A)

Obvod o obdélníku s délkami stran a a b je dán vztahem $o = 2 \cdot (a + b)$. Zvětšený obdélník má rozměry $(x + a + x)$ a $(x + b + x)$, tzn. $(a + 2x)$ a $(b + 2x)$.
Pro obvod o_v zvětšeného obdélníku platí:

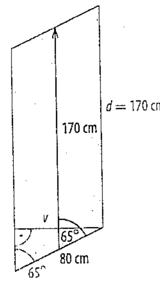
$o_v = 2 \cdot [(a + 2x) + (b + 2x)] = 2 \cdot (a + b + 4x) = 2 \cdot (a + b) + 8x$
$o_v = o + 8x$

Obvod obdélníku při zvětšení délek jeho stran o konstantní šířku $2x$ se zvětší o konstantní délku $8x$ (v našem případě $8 \cdot 1{,}5$ m) nezávisle na původních délkách stran obdélníku.

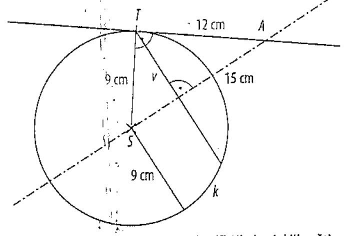
Úloha 19
D)

Při daném posunutí shrneme radlicí sníh na ploše rovnoběžníku (viz obrázek). Plochu rovnoběžníku stanovíme podle vzorce $S = d \cdot v$, kde d je délka strany rovnoběžníku ($d = 170$ cm) a v je jeho výška. Výšku v rovnoběžníku stanovíme z vyznačeného pravoúhlého trojúhelníku pomocí goniometrické funkce sinus. Platí $v = (80 \cdot \sin 65°)$ cm.
Obsah rovnoběžníku činí:

$S = (170 \cdot 80 \cdot \sin 65°)$ cm$^2 \doteq 1{,}23$ m^2



Úloha 20
14,4 cm



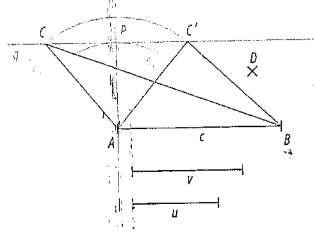
Vyznačíme si pravoúhlý trojúhelník AST. Hledaná délka tětivy je rovna dvojnásobku výšky v pravoúhlého trojúhelníku AST na přeponu AS. V trojúhelníku AST známe délku odvěsny ST (poloměr kružnice) a délku přepony AS. Délku odvěsny AT vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, $|AT| = 12$ cm. Obsah trojúhelníku AST vyjádříme dvěma způsoby a z rovnosti obou vyjádření vypočítáme výšku v.

Platí $S_{\triangle AST} = \frac{|AT| \cdot |ST|}{2}$ a $S_{\triangle AST} = \frac{|AS| \cdot v}{2}$. Odtud $v = \frac{|AT| \cdot |ST|}{|AS|} = 7{,}2$ cm.

Výšku v lze stanovit i pomocí Euklidových vět, pomocí definic goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku nebo s využitím podobnosti trojúhelníků.

Úloha 21
viz obrázek

Úloha je polohová a v polorovině ABD má dvě řešení.



Postup:
1. p; $A \in p \perp AB$
2. k_1; $k_1(A; u)$
3. P; $P = p \cap k_1$
4. q; $P \in q \parallel AB$
5. k_2; $k_2(A; v)$
6. C; $C = k_1 \cap q$
7. $\triangle ABC$

6. Planimetrie

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

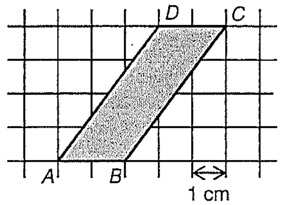
Úsek, který se ve skutečnosti ujde deseti kroky, je na plánu znázorněn úsečkou délky 1 cm. Kruh na plánu má poloměr 2,5 cm.

(CERMAT)

1 Vypočtěte, kolika kroky se obejde po obvodu skutečný kruh.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁCH 2–3

Ve čtvercové síti je umístěn rovnoběžník $ABCD$.



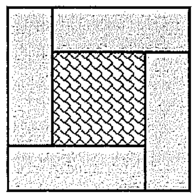
(CERMAT)

2 Vypočtěte obsah rovnoběžníku $ABCD$ a výsledek uveďte v cm².

3 V rovnoběžníku $ABCD$ určete poměr velikostí obou výšek.
(Výsledek uveďte v základním tvaru.)

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Vzor na dlaždici tvoří čtyři shodné obdélníky a čtverec uprostřed. Obvod každého z obdélníků je 30 cm.



(CERMAT)

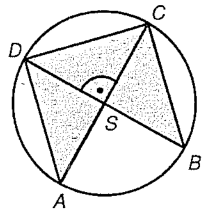
4

4.1 Vypočtěte obvod celé dlaždice (o).

4.2 Vypočtěte obsah dlaždice (S).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Do kružnice se středem S a poloměrem $r = 3$ cm je vepsán šedý obrazec $ASBCD$.



(CERMAT)

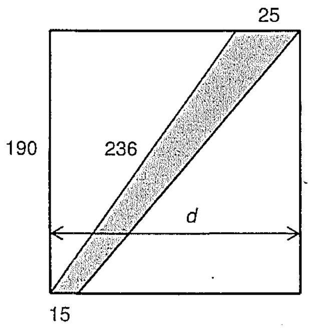
5 Vypočtěte v cm² obsah šedého obrazce $ASBCD$.

6 Délky základen lichoběžníku jsou $a = 4{,}2 \cdot 10^8$ metrů, $c = 8 \cdot 10^7$ metrů, výška v má velikost $4{,}8 \cdot 10^5$ metrů.

Vypočtěte obsah plochy lichoběžníku.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 7–8

Pozemek tvaru obdélníku je dočasně přerušen stavebním záborem (šedá plocha). Rovnoběžné hranice záboru na obvodu pozemku jsou dlouhé 15 m a 25 m. Jedna šikmá strana záboru, která je oplocena, má délku 236 m. Nyní se pokračuje v oplocování 190 m dlouhé strany pozemku.



Rozměry v obrázku jsou uvedeny v metrech.

(CERMAT)

7 Vypočtěte obsah plochy stavebního záboru.

8 S přesností na celé metry vypočtěte šířku pozemku (d).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Okrasná část zahrady má tvar obdélníku, jehož rozměry se liší o jediný metr. Po úhlopříčce dlouhé 29 metrů vede pěšinka.

(CERMAT)

9 **Určete délku a šířku okrasné zahrady.** (Šířka pěšinky se při výpočtu zanedbává.)

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Čtvercový travnatý pozemek se obchází po dvou stranách jeho obvodu celkem třemi sty kroky. Neukázněný chodec dostal pokutu za to, že pozemek přešel po úhlopříčce.

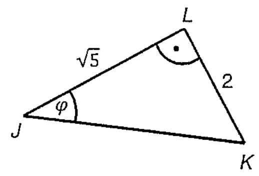
(CERMAT)

10 **Vypočtěte, kolik kroků neukázněný chodec ušetřil a výsledek zaokrouhlete na desítky.**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V trojúhelníku JKL platí:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

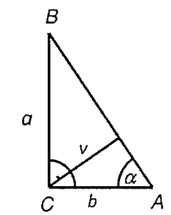


(CERMAT)

11 **Určete hodnotu** $\sin\varphi$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 12–13

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je pravý úhel při vrcholu C, úhel CAB má velikost $\alpha = 60°$ a strana AC má délku $b = 6\sqrt{3}$.



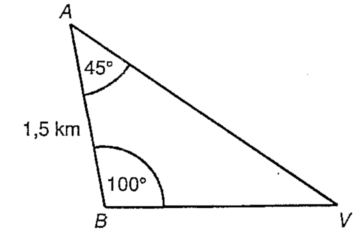
(CERMAT)

12 **Vypočtěte délku strany** BC.

13 **Vypočtěte velikost výšky** v **na přeponu** AB.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Na plánu jsou vyznačeny údaje pořízené při zaměřování vrtné věže V ze dvou stanovišť A a B.



(CERMAT)

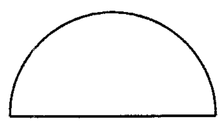
14

14.1 Určete nejmenší úhel, pod kterým je možné od věže V sledovat současně obě stanoviště A a B.

14.2 Určete s přesností na celé metry přímou vzdálenost stanoviště B od vrtné věže V.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

Pozemek tvaru půlkruhu je třeba oplotit. Na rovnou část plotu se použije 28 metrů pletiva.



(CERMAT)

15 **Kolik celých metrů pletiva bude nejméně potřeba na zbytek plotu po oblouku?**

A) 44 metrů

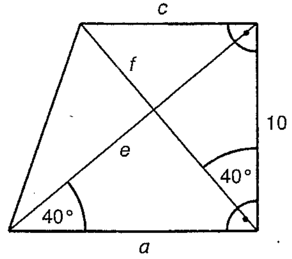
B) 48 metrů

C) 52 metrů

D) 56 metrů

E) jiný počet

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 23



(CERMAT)

23 Přiřaďte ke každé úsečce (23.1–23.3) její délku (A–E):

23.1 strana a ____

23.2 strana c ____

23.3 úhlopříčka f ____

A) $10 \cdot \sin 40°$

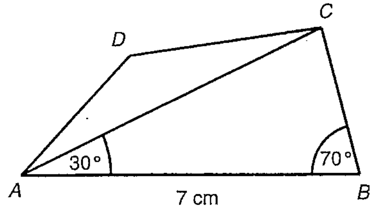
B) $\dfrac{10}{\sin 40°}$

C) $\dfrac{10}{\cos 40°}$

D) $10 \cdot \mathrm{tg}\, 40°$

E) $\dfrac{10}{\mathrm{tg}\, 40°}$

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 21



(CERMAT)

21 Jaká je délka úhlopříčky AC vypočtená s přesností na desetiny centimetru?

A) menší než 6,1 cm

B) 6,1 cm

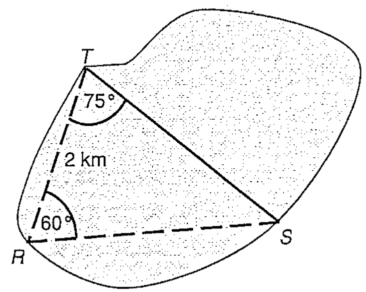
C) 6,7 cm

D) 7,0 cm

E) větší než 7,0 cm

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Pozemek zakreslený v plánku má být rozdělen rovnou hranicí ST na dvě části.



(CERMAT)

22 Jaká je délka hranice ST vypočtená s přesností na desítky metrů?

A) $|ST| = 2\,230$ m

B) $|ST| = 2\,450$ m

C) $|ST| = 2\,630$ m

D) $|ST| = 2\,800$ m

E) $|ST| = 3\,010$ m

16 Délky stran trojúhelníku jsou 8 cm, 9 cm a 13 cm. Podobný trojúhelník má obvod o 15 cm větší.

Jaká je délka nejdelší strany podobného trojúhelníku?

A) 20 cm

B) 19,5 cm

C) 19 cm

D) 18 cm

E) jiná délka

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $\alpha = 40°$.
Pro délky stran platí vztah $a^2 + b^2 = c^2$.

(CERMAT)

17 **Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (17.1–17.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).**

		A	N
17.1	Nejdelší strana je c.	☐	☐
17.2	Největší úhel má velikost 100°.	☐	☐
17.3	Trojúhelník je rovnoramenný.	☐	☐
17.4	Osa strany b je rovnoběžná se stranou a.	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Světelné paprsky svírají s vodorovnou podložkou úhel 50°. Tyč postavená kolmo k podložce je vysoká 180 cm.

(CERMAT)

18 **Jak dlouhý stín (v cm) vrhá tyč na položku?**

A) $\frac{180}{\sin 50°}$

B) $180 \cdot \sin 50°$

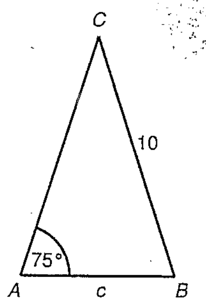
C) $\frac{180}{\cos 50°}$

D) $180 \cdot \mathrm{tg}\, 50°$

E) $\frac{180}{\mathrm{tg}\, 50°}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB platí:
$|AC| = |BC| = 10$; $\alpha = |\sphericalangle CAB| = 75°$



(CERMAT)

19 **Jakou délku má základna $c = |AB|$?**

(Výsledky jsou zaokrouhleny na desetiny.)

A) 4,9

B) 5,2

C) 5,5

D) 5,8

E) jinou délku

20 Trojúhelník ABC má délky stran $a = 3$ cm, $b = 5$ cm a $c = 7$ cm.

Jaký je součet velikostí dvou nejmenších vnitřních úhlů trojúhelníku ABC?

A) 22°

B) 38°

C) 60°

D) 105°

E) jiný

6. Planimetrie

1 Strana AB obdélníku $ABCD$ měří 84 cm. Úhlopříčka AC je o 72 cm delší než strana BC.

Určete obsah obdélníku $ABCD$.

Řešení: 1 092 cm^2

---

2 **Jaká je velikost vnitřního úhlu pravidelného osmiúhelníku?**

A) 108°

B) 120°

C) 125°

D) 135°

E) 140°

Řešení: D

---

3 **Které dokončení věty vede k pravdivému tvrzení?**

Jestliže se průměr kruhu zvětší třikrát, pak se jeho

A) poloměr zvětší 1,5krát, obvod se zvětší 6krát a obsah se zvětší 9krát.

B) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 3krát a obsah se zvětší 3krát.

C) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 3krát a obsah se zvětší 9krát.

D) poloměr zvětší 9krát, obvod se zvětší 9krát a obsah se zvětší 9krát.

E) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 6krát a obsah se zvětší 9krát.

Řešení: C